Bewegungsgleichung der Speziellen Relativitätstheorie

Dienstag, 26. Juni 2012 - 01:41 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Wenn es um Geschwindigkeiten ab einigen Prozenten der Lichtgeschwindigkeit geht, treten mehr und mehr sogenannte relativistische Effekte in Erscheinung: Die Zeit läuft im bewegten System langsamer als im ruhenden und die Längen werden in Bewegungsrichtung kürzer, um nur einige der Effekte zu erwähnen[1].

Im Prinzip wird aber die relativistische Bewegungsgleichung wie die Newtonsche Bewegungsgleichung gelöst. Nur sind die Formeln einiges komplizierter.

In der Regel sind Bewegungsgleichungen so kompliziert, dass sie nur mit numerischen Verfahren[2] gelöst werden können. Das Beispiel einer konstant beschleunigten Rakete ist jedoch einfach genug, sodass die Bewegungsgleichung algebraisch gelöst werden kann.

Vektoren

Zur Herleitung der relativistischen Bewegungsgleichung muss ich zunächst Vierervektoren und deren Ableitung erklären.

Im dreidimensionalen Raum hat ein Vektor[3] bekanntlich drei Komponenten wie hier zum Beispiel der Vektor $\vec{x}$:

$$\vec{x} = x^m = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor hat in einem Koordinatensystem KS die drei Koordinaten (x, y, z). In einem anderen Koordinatensystem KS', das gegenüber dem ersten gedreht ist, hat der selbe Vektor andere Koordinaten (x', y', z'). Über eine Rotations-Transformation können die Koordinaten von einem System in das andere umgerechnet werden. Eine Rotations-Transformation ist im Wesentlichen eine Matrix-Multiplikation.

Was aber in beiden Koordinatensystemen gleich bleibt, ist die Länge l des Vektors, die wiefolgt berechnet werden kann:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \tag{1}$$

Die Länge eines Vektors ist invariant bezüglich Rotations-Transformationen oder allgemeiner bezüglich Galilei-Transformationen.

Vierervektoren

Ein Vierervektor ist ein Vektor mit einer Zeit und drei Raumdimensionen und hat ein sog. indefinites Längenquadrat (Intervall)[4]. Letzteres bedeutet, dass auch ein Vierervektor eine invariante Grösse hat, ähnlich der Länge eines 3-D-Vektors. Dieses Längenquadrat ist invariant unter der sog. Lorentz-Transformation[5]. In zwei gegeneinander bewegten Inertialsystemen[6] hängen die Komponenten des Vierervektors durch eine Lorentz-Transformation miteinander zusammen.

Schreibweise

Um Vierervektoren von 3-dimensionalen Vektoren unterscheiden zu können, verwendet man griechische Buchstaben als Index (z.B. μ, sprich *mü*). Diese haben die Werte (0, 1, 2, 3):

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{kontravariant}$$

Dies ist kontravarianter Vierervektor. Die Vierervektoren gibt es in zwei Varianten, kontravariant und kovariant[7]. Beim kovarianten Vektor stehen die Indizes unten. Ein kovarianter Vektor wird zur Unterscheidung oft als Zeilenvektor geschrieben:

$$x_\mu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \qquad \textbf{kovariant}$$

Die Komponenten zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren werden über den sog. Metrik-Tensor[8] $\eta_{\mu\nu}$ in einander transformiert. In der speziellen Relativitätstheorie, wo es um flache Raumzeit geht, ist der Metrik-Tensor einfach $\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, aber darauf brauche ich an dieser Stelle nicht näher einzugehen.

Hinweis: In Texten werden beide Vektorarten meist als Zeilenvektoren geschrieben. Anhand der Position des Index kann ja ein kontravarianter von einem kovarianten Vektor unterschieden werden.

Längenquadrat (Intervall)

Das invariante Längenquadrat (auch Raumzeit-Intervall oder einfach Intervall genannt) ist für Vierervektoren als Skalarprodukt[9] des kovarianten mit dem kontravarianten Vektor definiert:

(2) $$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \cdot \mathrm{d}x^\mu = \left(\mathrm{d}x^0\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^3\right)^2$$

Im Gegensatz zu 3-D-Vektoren gehen bei den Vierervektoren die Quadrate der drei Raumkoordinaten mit einem Minuszeichen in das Längenquadrat ein!

Nur wenn das Längenquadrat eines 4-dimensionalen Vektors invariant gegenüber der Lorentz-Transformation ist, handelt es sich um einen echten Vierervektor.

Orts-Vierervektor

Die erste Komponente eines Orts-Vierervektors ist die Zeitkoordinate, multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit c, damit diese Koordinate auch die Einheit einer Länge hat.

Die kontravariante Darstellung des Orts-Vierervektors ist:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Dass x^μ ein Vierervektor ist folgt daraus, dass sein Längenquadrat (Intervall) unter der Lorentz-Transformation invariant bleibt. Das indefinite Längenquadrat lautet:

(3) $$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \cdot \mathrm{d}x^\mu = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Was dieses Längenquadrat aussagt ist folgendes: Jedes Ereignis findet in einem Inertialsystem IS an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit statt. Ort und Zeit bilden zusammen die Komponenten eines Ortsvierervektors $x^\mu = (ct, x, y, z)$. In einem anderen Inertialsystem IS', das sich zu IS gleichförmig mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat das selbe Ereignis andere Koordinatenwerte $x^{\mu\prime} = (ct', x', y', z')$. Über die Lorentz-Transformation können diese Werte von einem System in das andere umgerechnet werden. Was jedoch in jedem IS immer gleich bleibt, ist das Längenquadrat:

(4) $$s^2 = \left(c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) = \left(c^2\,t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\right)$$

Vierergeschwindigkeit

Aus dem Orts-Vierervektor x^μ lassen sich weitere Vierervektoren ableiten. Wir benötigen zunächst die Vierergeschwindigkeit u^μ. Diese erhält man durch Differenzieren des Ortsvierervektors x^μ nach der Eigenzeit[10] $\mathrm{d}\tau$.

Die Vierergeschwindigkeit ist definiert als:

(5) $$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

(6) $$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \leftrightarrow \qquad \mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\mathrm{d}\tau$$

(7) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}$$

wobei
- u^μ = Vierergeschwindigkeit
- x^μ = Orts-Vierervektor
- τ = Eigenzeit des bewegten Systems
- γ = Lorentzfaktor[11]
- t = Zeit des ruhenden Systems
- v = Geschwindigkeit des bewegten Systems bezgl. des Ruhesystems
- c = Lichtgeschwindigkeit[12]

Zunächst wird in (5) $\mathrm{d}\tau$ durch $\mathrm{d}t$ nach der Formel (6) ersetzt. Dadurch kommt der Lorentzfaktor γ ins Spiel. Dann wird jede Komponente des Ortsvektors nach der Zeit t abgeleitet. Es entsteht ein neuer Vierervektor. Ein Punkt auf einem Buchstaben bedeutet *abgeleitet nach der Zeit*:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Beweis dass Vierergeschwindigkeit ein Vierervektor ist

Ich muss sicher sein, dass die abgeleitete Vierergeschwindigkeit ein Vierervektor ist, das heisst, dass der Betrag des Vektors in allen Inertialsystemen den selben Wert hat, also invariant unter der Lorentz-Transformation ist. Ich berechne daher den Betrag $|u^\mu|$ der Vierergeschwindigkeit:

(8) $$|u^\mu|^2 = u_\mu \cdot u^\mu = \gamma\,(c, -v_x, -v_y, -v_z) \cdot \gamma \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \gamma^2\,\left[c^2 - {v_x}^2 - {v_y}^2 - {v_z}^2\right]$$

Beachte, dass oben das Skalarprodukt[9] des kovarianten mit dem kontravarianten Vektor berechnet wird. Die Terme in der letzten Klammer bilden also keinen Vektor, sondern eine Zahl. Die letzten drei Terme in der Klammer ergeben gerade die negative Länge des räumlichen Geschwindigkeitsvektors im Quadrat:

(9) $$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$$

Also kann ich (8) auch schreiben:

(10) $$|u^\mu|^2 = \gamma^2 \, \left[c^2 - \left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right)\right] = \gamma^2 \left(c^2 - v^2\right)$$

Wenn ich jetzt noch γ aus (7) einsetze erhalte ich:

(11) $$|u^\mu|^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\left(c^2 - v^2\right)}{\frac{1}{c^2} \cdot \left(c^2 - v^2\right)} = c^2$$

Der Betrag $|u^\mu|$ der Vierergeschwindigkeit u^μ ist somit immer gleich der Lichtgeschwindigkeit c, welche in jedem Inertialsystem per Definition der Relativitätstheorie die selbe ist!

Auch jeder andere Vierervektor, der so abgeleitet wird, muss ein Vierervektor sein! Das nütze ich nun aus:

Viererimpuls

Der klassische Impuls ist definiert als $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Der relativistische Viererimpuls ist analog definiert:

(12) $$p^\mu = m \cdot u^\mu = m \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

wobei	p^μ	=	relativistischer Viererimpuls
	m	=	Ruhemasse des Körpers
	u^μ	=	Vierergeschwindigkeit
	γ	=	Lorentzfaktor, siehe (7)
	c	=	Lichtgeschwindigkeit
	$\vec{v}$	=	3-dimensionaler Geschwindigkeitsvektor $\left(v_x, v_y, v_z\right)$

Beachte: Weil u^μ ein Vierervektor ist, ist auch der Impuls p^μ ein Vierervektor, denn wenn ein Vierervektor mit einem Skalar (im Beispiel die Masse m) multipliziert wird, bleibt er ein Vierervektor, d.h. sein Betrag ist in jedem Inertialsystem der selbe.

Viererkraft und Bewegungsgleichung

Wie beim Viererimpuls kann eine Viererkraft, auch Minkowski-Kraft genannt, analog zur entsprechenden Newton-Kraft $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ definiert werden:

(13) $$\boxed{K^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$ **Bewegungsgleichung der speziellen Relativitätstheorie**

wobei
K^μ = Viererkraft
p^μ = Viererimpuls
u^μ = Vierergeschwindigkeit
τ = Eigenzeit des bewegten Systems
m = Konstante Masse des Objektes

Da der Impuls p^μ ein Vierervektor ist und dieser nach der Eigenzeit τ abgeleitet wird, ist auch die Minkowskikraft K^μ ein echter Vierervektor, dessen Betrag invariant unter der Lorentz-Transformation ist!

Im nächsten Abschnitt werde ich diese Bewegungsgleichung am Beispiel einer gleichförmig beschleunigten Rakete lösen.

Weitere Informationen

1. Relativitätstheorie; *Wikipedia*
2. Numerische Mathematik; *Wikipedia*
3. Vektor; *Wikipedia*
4. Vierervektor; *Wikipedia*
5. Lorentz-Transformation; *Wikipedia*
6. Inertialsystem; *Wikipedia*
7. Kovarianz; *Wikipedia*
8. Metrischer Tensor; *Wikipedia*
9. Skalarprodukt; *Wikipedia*
10. Eigenzeit; *Wikipedia*
11. Lorentzfaktor; *Wikipedia*
12. Lichtgeschwindigkeit; *Wikipedia*