Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete (1)

Dienstag, 26. Juni 2012 - 01:42 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Das Lösen der relativistischen Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete habe ich auf drei Seiten aufgeteilt:

- **Teil 1: Lösen der Differentialgleichung**
- **Teil 2: Zusammenhang von Beschleunigung, Strecke und Zeiten**
- **Teil 3: Längenkontraktion und Raumzeit-Intervall**

Auf dieser Seite geht es um das Lösen der Differentialgleichung und das Berechnen der Geschwindigkeit als Funktion der Erdzeit.

(1) $$\boxed{K^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$ **Bewegungsgleichung der speziellen Relativitätstheorie**

wobei
K^μ = Viererkraft
p^μ = Viererimpuls
u^μ = Vierergeschwindigkeit
τ = Eigenzeit des bewegten Systems
m = Konstante Masse des Objektes

Vereinfachung der Berechnungen

Für die Berechnungen gelten folgende Vorgaben und Vereinfachungen:

Alle Gravitationskräfte werden ignoriert

Daraus folgt, dass die Raumzeit, durch welche die Rakete fliegt, nicht gekrümmt ist. Solange sich die Rakete nicht in der Nähe eines Himmelskörpers befindet, kann die Raumzeitkrümmung vernachlässigt werden und ich kann die Bewegungsgleichung der speziellen Relativitätstheorie anwenden.

Die Masse m der Rakete sei konstant

Dies bewirkt, dass die Masse nicht von der Zeit abhängt und somit die Integrale nicht unnötig kompliziert werden.

Beschleunigung a im Koordinatensystem der Rakete sei konstant

Dies ergibt einfache Integrale, die algebraisch gelöst werden können.

Die Rakete bewege sich nur entlang der X-Achse des ruhenden Systems

Dies reduziert das Problem von drei auf eine Raumdimension plus eine Zeitdimension.

Lorentz-Transformation

Die Beschleunigung a der Rakete und die dafür benötigte Schubkraft F sind nur im Koordinatensystem KS' der Rakete konstant. Um Kraft und Beschleunigung ins ruhende System umzurechnen, muss ich die Lorentz-Transformation Λ_v anwenden. Ich mache ab jetzt die Vereinfachung, dass es nur noch eine Raum-Dimension gibt:

(2) $$K^\mu = \begin{pmatrix} K^0 \\ K^1 \end{pmatrix} = \Lambda_v \cdot K^{\mu\prime} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K^{0\prime} \\ K^{1\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

wobei

	K^μ	=	Viererkraft im ruhenden System
	$K^{\mu\prime}$	=	Viererkraft im Raketen-System
	Λ_v	=	Lorentz-Transformation, die von v abhängig ist
	$K^{0\prime}$	=	Zeitkomponente der Kraft im Raketen-System (Leistung $K^{0\prime} = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$, A = Arbeit)
	$K^{1\prime}$	=	Raumkomponente der Kraft im Raketen-System
	F	=	Die Rakete beschleunigende konstante Kraft

Wenn ich die Lorentz-Transformation[1] Λ_v anwende erhalte ich die Kraftkomponenten im ruhenden System:

(3) $$K^0 = \gamma \cdot \left(K^{0\prime} + \frac{v}{c} \cdot K^{1\prime}\right) = \gamma \cdot \frac{v}{c} \cdot F = \frac{v}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot F$$

(4) $$K^1 = \gamma \cdot \left(K^{1\prime} + \frac{v}{c} \cdot K^{0\prime}\right) = \gamma \cdot F = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot F$$

Die Zeitkomponente der Kraft K^0 entspricht der Leistung (Arbeit pro Zeit) und hat für meine Berechnungen keine Bedeutung. Die X-Komponente der Kraft K^1 kann ich jetzt in die relativistische Bewegungsgleichung einsetzen. Die relativistische Bewegungsgleichung lautet:

(5) $$\boxed{K^\mu = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$

Mich interessiert nur die X-Komponente, also:

(6) $$K^1 = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau}$$

Links kann ich $K^1 = \gamma \cdot F$ einsetzen und rechts kann ich $\mathrm{d}\tau$ durch $\mathrm{d}t/\gamma$ ersetzen:

(7) $$\gamma \cdot F = m \cdot \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, u^1 \qquad \Rightarrow \qquad F = m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, u^1$$

Auf jeder Seite konnte ich ein γ streichen. Laut Formel (5, Vierergeschwindigkeit) gilt: $u^1 = \gamma \cdot v_x = \gamma \cdot v$. Dies kann ich oben einsetzen und erhalte:

Lösen der Differentialgleichung

(8) $$\boxed{F = m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\gamma \cdot v(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}}\right)}$$

Um das Differential in (8) rechts zum Verschwinden zu bringen, integriere ich beide Seiten:

(9) $$\int_0^T F \,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(10) $$\int_0^T F \,\mathrm{d}t = [F \cdot t]\Big|_0^T = [F \cdot T] - [F \cdot 0] = F \cdot T$$

Rechte Seite integrieren:

(11) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}}\right]\Bigg|_0^T = \left[\frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1 - \frac{v(T)^2}{c^2}}}\right] - \left[\frac{m \cdot v(0)}{\sqrt{1 - \frac{v(0)^2}{c^2}}}\right]$$

Da die Geschwindigkeit am Anfang Null ist gilt $v(0) = 0$ und das rechte Integral ist somit schliesslich:

(12) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}}\right) \mathrm{d}t = \frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}}$$

Schliesslich kann ich die roten Resultate von (10) und (12) einander wieder gleichsetzen:

(13) $$F \cdot T = \frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}}$$

Wenn ich in (13) die Kraft F durch die Beschleunigung $F = m \cdot a$ ausdrücke, kann ich die Masse m auf beiden Seiten streichen und ich habe eine Formel, in der nur noch a, c, $v(T)$ und T vorkommt:

(14) $$m \cdot a \cdot T = \frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad a \cdot T = \frac{v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}}$$

Diese Formel kann ich nun nach $v(t)$ auflösen (ich benne T wieder in t um) und erhalte schliesslich die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, womit ich die Lösung der Bewegungsgleichung habe.

> Bruch nach links und linke Seite rechts in Nenner bringen:
>
> (15) $$\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{v(t)}{a \cdot t}$$
>
> Beide Seiten quadrieren:
>
> (16) $$1-\frac{v(t)^2}{c^2} = \frac{v(t)^2}{a^2 \cdot t^2}$$
>
> Alle Terme mit $v(t)$ auf linke Seite, Rest auf rechte Seite:
>
> (17) $$\frac{v(t)^2}{a^2 \cdot t^2} + \frac{v(t)^2}{c^2} = 1$$
>
> Linke Seite auf gleichen Nenner bringen und $v(t)^2$ ausklammern:

(18) $$\frac{v(t)^2 \cdot c^2 + v(t)^2 \cdot a^2 \cdot t^2}{a^2 \cdot c^2 \cdot t^2} = v(t)^2 \cdot \left(\frac{c^2 + a^2 \cdot t^2}{a^2 \cdot c^2 \cdot t^2} \right) = 1$$

Bruch auf rechte Seite bringen und etwas umformen (c^2 ausklammern):

(19) $$v(t)^2 = \frac{a^2 \cdot c^2 \cdot t^2}{c^2 + a^2 \cdot t^2} = \frac{c^2 \cdot (a^2 \cdot t^2)}{c^2 \cdot \left(1 + (\frac{a \cdot t}{c})^2\right)} = \frac{a^2 \cdot t^2}{(\frac{a \cdot t}{c})^2 + 1}$$

Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen (in unserem Beispiel interessiert uns nur die positive Lösung):

(20) $$v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{(\frac{a \cdot t}{c})^2 + 1}}$$

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

Für konstante Beschleunigung a und Startgeschwindigkeit $v_0 = 0$ erhalte ich:

(21) $$\boxed{v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{(\frac{a \cdot t}{c})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(a \cdot t)^2} + \frac{1}{c^2}}}}$$

wobei	$v(t)$	=	Geschwindigkeit nach Ablauf der Erdzeit t
	a	=	konstante Beschleunigung in der Rakete
	t	=	bisher vergangene Zeit auf der Erde
	c	=	Lichtgeschwindigkeit

Für die Geschwindigkeit v an der Position s der Reise von der Erde aus gemessen wird in der Rakete jeweils der selbe Wert wie auf der Erde gemessen. Die Uhren auf der Erde und in der Rakete zeigen an dieser Position jedoch verschiedene Zeiten an. Wir können die Geschwindigkeit auch in Bezug zur Raketenzeit τ berechnen, wenn wir den Zusammenhang zwischen t und τ verwenden (siehe Umrechnung Raketenzeit in Erdzeit):

(22) $$\boxed{v(\tau) = \frac{a \cdot t(\tau)}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t(\tau)}{c}\right)^2 + 1}}}$$

mit $$t(\tau) = \frac{c}{a} \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \tau}{c}\right)$$

wobei $v(\tau)$ = Geschwindigkeit gemessen nach Ablauf der Zeit τ in der Rakete

a = konstante Beschleunigung in der Rakete

τ = bisher vergangene Zeit in der Rakete

c = Lichtgeschwindigkeit

Betrachten wir die Formel (21) etwas genauer. Mich interessiert insbesondere, wie sich die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit verhält, wenn die Rakete noch viel langsamer als Lichtgeschwindigkeit fliegt und ob die Rakete nach dieser Formel die Lichtgeschwindigkeit jemals erreicht oder nicht.

Nichtrelativistischer Geschwindigkeitsbereich

Von nichtrelativistischer Geschwindigkeit spricht man, wenn eine Geschwindigkeit v viel kleiner als Lichtgeschwindigkeit c ist. Mathematisch schreibt man das:

$v \ll c$ sprich: v ist viel kleiner als c

Um herauszufinden, wie sich die Formel (21) verhält, wenn $v \ll c$ gilt, müssen wir schauen, ob es in der Formel Terme gibt, die in diesem Fall vernachlässigt werden können. In der Formel (21) kommt nach dem Gleichheitszeichen kein v vor, das wir mit c vergleichen könnten. Aber es gilt: $v = a \cdot t$ und $a \cdot t$ kommt rechts vom Gleichheitszeichen vor. Wir schauen daher, wie sich die Formel verhält, wenn $a \cdot t \ll c$ ist.

Für diese Abschätzung ist der linke Teil der Formel (21) hilfreich:

(23) $$v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\frac{(a \cdot t)^2}{c^2} + 1}}$$

Betrachten wir den Bruch in der Wurzel. Wenn $a \cdot t \ll c$ ist, zum Beispiel sei $a \cdot t = 0.001 \cdot c$, dann gilt:

(24) $$\frac{(a \cdot t)^2}{c^2} = \frac{(0.001 \cdot c)^2}{c^2} = \frac{0.000001 \cdot c^2}{c^2} = 0.000001 \ll 1$$

Wir sehen, dass dieser Bruch für kleine Geschwindigkeiten sehr viel kleiner als 1 wird und deshalb gegenüber der 1 in der Wurzel vernachlässigt werden kann. Wir erhalten also als Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten:

(25) $$v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\frac{(a \cdot t)^2}{c^2} + 1}} \approx \frac{a \cdot t}{\sqrt{1}} = a \cdot t \qquad \Big| \, a \cdot t \ll c$$

Die resultierende Formel $v(t) = a \cdot t$ ist genau die Formel nach Newtons Theorie. Newtons Formel ist also in der relativistischen Formel als Grenzfall für langsame Geschwindigkeiten enthalten. Erst bei hohen Geschwindigkeiten kommen Terme zum tragen, die eine Abweichung von Newtons Vorhersagen ergeben.

Geschwindigkeitslimit c

Was passiert nun, wenn wir sehr, sehr lange beschleunigen? Nach (25) könnten wir beliebige Geschwindigkeiten weit über der Lichtgeschwindigkeit erhalten, wenn wir nur lange genug beschleunigen.

Nicht so jedoch bei der relativistischen Formel (21):

Für die Betrachtung, was passiert, wenn wie sehr, sehr lange beschleunigen, ist der rechte Teil der Formel (21) hilfreich:

(26) $$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(a \cdot t)^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Wenn wir sehr lange beschleunigen bedeutet das, dass t bzw. $a \cdot t$ sehr gross werden, im Extremfall gegen Unendlich streben. Dann wird der erste Bruch unter der Wurzel $1/\infty = 0$ und wir erhalten als Grenzfall:

(27) $$v(t) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{0 + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c \qquad \Big| \, t \to \infty$$

Wir bekommen also als Grenzfall für unendliche lange Beschleunigung Lichtgeschwindigkeit c. Diese kann also nie ganz erreicht oder gar überschritten werden.

Dies ist eine komplett andere Vorhersage als das Resultat aus Newtons Theorie! Bei Newton gibt es kein Limit für die Geschwindigkeit.

Weitere Informationen

1. Lorentz-Transformation; *Wikipedia*