Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete (2)

Dienstag, 16. April 2013 - 01:57 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Das Lösen der relativistischen Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete habe ich auf drei Seiten aufgeteilt:

- **Teil 1: Lösen der Differentialgleichung**
- **Teil 2: Zusammenhang von Beschleunigung, Strecke und Zeiten**
- **Teil 3: Längenkontraktion und Raumzeit-Intervall**

Auf dieser Seite werden einige Zusammenhänge zwischen Beschleunigung, Strecke und Zeiten berechnet, jeweils aus Sicht der Erde und der Rakete.

Beschleunigung der Rakete von der Erde aus gesehen

Die Rakete wird vom Inertialsystem der Rakete IS' aus gesehen mit der konstanten Beschleunigung a beschleunigt. Wie gross ist diese Beschleunigung von der Erde aus gesehen? Da die Rakete nie Lichtgeschwindigkeit erreichen kann, muss die Beschleunigung a_E von der Erde aus gesehen gegen Null gehen.

Um die Beschleunigung a_E zu berechnen leite ich die Formel (1) für die Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit t ab (2):

(1) $$\boxed{v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}}$$

(2) $$a_E(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}$$

> Wurzel als Potenz schreiben und dann die Kettenregel für Ableitungen anwenden:
>
> (3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ at \left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} =$$
>
> $$a \left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} + at \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \left(\frac{at}{c}\right) \frac{a}{c} \right\}$$

Rechte Seite zusammenfassen:

(4) $$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a\left[\left(\frac{at}{c}\right)^2+1\right]^{-\frac{1}{2}} - a\left(\frac{at}{c}\right)^2\left[\left(\frac{at}{c}\right)^2+1\right]^{-\frac{3}{2}}$$

Um eine bessere Übersicht zu erhalten, substituiere ich $x = (at/c)$ und schreibe die Klammern mit negativem Exponenten unter den Bruchstrich:

(5) $$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{ax^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

Beide Terme auf den selben Nenner bringen, dann kann der Zähler vereinfacht werden:

(6) $$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{a\,(x^2+1)-ax^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} = \frac{a}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Wenn ich für x wieder (at/c) einsetze, erhalte ich:

(7) $$\boxed{a_E(t) = \frac{a}{\left[\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)^2+1\right]^{3/2}}}$$

wobei
a_E = Beschleunigung der Rakete von der Erde aus gesehen
t = bisher vergangene Zeit auf der Erde
v = Geschwindigkeit der Rakete
a = konstante Beschleunigung in der Rakete
c = Lichtgeschwindigkeit

Strecke als Funktion der Erdzeit

Mich interessiert jetzt, welche Strecke legt die Rakete in der Zeit t zurück, wenn sie konstant mit a beschleunigt.

Einerseits kenne ich jetzt die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit $v(t)$, andererseits kenne ich den Zusammenhang zwischen Weg s und Geschwindigkeit (du erinnerts dich an Weg als Funktion der Zeit beim Beispiel nach Newton?):

(8) $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}$$

Ich muss wieder beide Seiten integrieren, damit sich das Differential auf der linken Seite löst:

(9) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(10) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = s(T) - s(0) = s(T) - s_0$$

Rechte Seite integrieren:

(11) $$\int_0^T \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]\Bigg|_0^T = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot T}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]$$

Die Stammfunktion oben rechts habe ich mit einem Computerprogramm ermittelt. Wenn ich die beiden roten Terme von (10) und (11) wieder zusammensetze, wobei ich die Startbedingung $s_0 = 0$ setze, erhalte ich:

(12) $$\boxed{s(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]}$$

wobei

s = Zurückgelegter Weg von der Erde aus gesehen

t = bisher vergangene Zeit auf der Erde

a = konstante Beschleunigung in der Rakete

c = Lichtgeschwindigkeit

Zeit für Strecke im ruhenden System

Wenn ich eine Strecke s vorgebe und wissen will, wie lange von der Erde aus gesehen die Rakete für diese Strecke braucht, so kann ich die Formel (12) nehmen und nach t auflösen.

> Ich gehe von der Formel (12) aus:

$$s = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right] \tag{13}$$

Erstes Ziel: Freistellen der Wurzel. Dazu multipliziere ich beide Seiten mit a und dividiere beide Seiten durch c^2. Danach Addiere ich auf beiden Seiten 1 und erhalte:

$$\frac{a \cdot s}{c^2} + 1 = \sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} \tag{14}$$

Ich vertausche nun die beiden Seiten:

$$\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} = \frac{a \cdot s}{c^2} + 1 \tag{15}$$

Beide Seiten quadrieren und dann von beiden Seiten 1 abziehen:

$$\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1 \tag{16}$$

Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen, wobei nur die positive Lösung Sinn macht:

$$\frac{a \cdot t}{c} = \sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1} \tag{17}$$

Jetzt muss nur noch t isoliert werden, indem auf beiden Seiten mit c multipliziert und durch a dividiert wird:

$$\boxed{t(s) = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1}} \tag{18}$$

wobei

wobei	$t(s)$	=	Flugzeit für die Strecke s von der Erde aus gemessen
	s	=	bisher zurückgelegter Weg der Rakete von der Erde aus gemessen
	a	=	konstante Beschleunigung in der Rakete
	c	=	Lichtgeschwindigkeit

Zeitdehnung der Rakete

Unter Vierergeschwindigkeit habe ich einen Zusammenhang zwischen $\mathrm{d}\tau$ und $\mathrm{d}t$ hingeschrieben:

(19) $$\mathrm{d}\tau(t) = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \cdot \mathrm{d}t \quad \leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}$$

Wenn ich jetzt $v(t)$ aus (1) in (19) rechts einsetze erhalte ich nach etwas umformen:

(20) $$\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \frac{a^2\,t^2}{c^2\left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1\right]}} = \sqrt{1 - \frac{a^2\,t^2}{a^2\,t^2 + c^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{(a^2\,t^2 + c^2) - a^2\,t^2}{a^2\,t^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2\,t^2 + c^2}} =$$

(21) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}}$$

wobei $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ = Verlangsamung der Raketenzeit nach Ablauf der Erdzeit t

a = konstante Beschleunigung in der Rakete

c = Lichtgeschwindigkeit

Mit der Formel (21) kann man ausrechnen, wievielmal langsamer die Uhr in der Rakete läuft als die Uhr auf der Erde. Dieser Wert ist von der Reisedauer t und der Beschleunigung der Rakete a abhängig. Je länger die Rakete beschleunigt wird, umso mehr nähert sich ihre Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit und umso langsamer vergeht in der Rakete die Zeit.

Wenn $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ zum Beispiel den Wert 0.5 ergibt, so läuft die Zeit in der Rakete nur noch halb so schnell wie auf der Erde.

Umrechnung Erdzeit in Raketenzeit

Die Formel (21) kann ich gleich verwenden für eine Formel, mit der von Erdzeit t in Raketenzeit τ umgerechnet werden kann. Ich muss nur (21) auf beiden Seiten integrieren:

(22) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(23) $$\int_0^T \frac{d\tau(t)}{dt}\,dt = \tau(t)\Big|_0^T = \tau(T) - \tau(0) = \tau(T) - \tau_0$$

Rechte Seite integrieren (die Stammfunktion $F(t)$ habe ich mit einem Computerprogramm bestimmt):

(24) $$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,dt = F(t)\Big|_0^T = -\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{(a\cdot t)^2 + c^2} - a\cdot t\right)\Bigg|_0^T =$$

Grenzen einsetzen $F(T) - F(0)$:

(25) $$\left[-\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{(a\cdot T)^2 + c^2} - a\cdot T\right)\right] - \left[-\frac{c}{a}\cdot\ln(c)\right] =$$

Terme in eckiger Klammer tauschen:

(26) $$\frac{c}{a}\cdot\ln(c) - \frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{(a\cdot T)^2 + c^2} - a\cdot T\right)$$

Die beiden Logarithmen nach der Regel $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$ zusammenfassen und c unter den Bruchstrich bugsieren:

(27) $$\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\frac{c}{\sqrt{(a\cdot T)^2 + c^2} - a\cdot T}\right) = \frac{c}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\cdot T}{c}\right)^2 + 1} - \left(\frac{a\cdot T}{c}\right)}\right)$$

Zur besseren Übersicht der folgenden Umformungen substituiere ich:

(28) $$x = \left(\frac{a\cdot T}{c}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{c}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\right)$$

Ich möchte den Nenner vereinfachen. Dort habe ich jetzt eine Differenz: $(a - b) = \sqrt{x^2+1} - x$. Wenn ich Zähler und Nenner mit $(a + b) = (\sqrt{x^2+1} + x)$ multipliziere:

(29) $$\frac{c}{a}\cdot\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}\right] =$$

erhalte ich im Nenner ein Binom der Form $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, wobei $a^2=(\sqrt{x^2+1})^2$ und $b^2=(x)^2$ ist, also:

$$\frac{c}{a}\cdot\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(x)^2}\right]=\frac{c}{a}\cdot\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{(x^2+1)-x^2}\right]=\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \tag{30}$$

Wenn ich für $x=(a\cdot T/c)$ rückeinsetze erhalte ich zusammengefasst:

$$\int_0^T\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)^2+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{\left(\frac{a\cdot T}{c}\right)^2+1}+\left(\frac{a\cdot T}{c}\right)\right)=\frac{c}{a}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot T}{c}\right) \tag{31}$$

Rote Terme von (23) und (31) wieder gleichsetzen und $\tau_0=0$ setzen ergibt, wenn ich für T wieder t schreibe:

$$\boxed{\tau(t)=\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)^2+1}+\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)\right)=\frac{c}{a}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)} \tag{32}$$

Achtung: Dies ist keine allgemein gültige Umrechnungsformel für die Zeiten. Sie gilt nur für das Beispiel der konstant beschleunigten Rakete!

Umrechnung Raketenzeit in Erdzeit

Zur Umrechnung von Raketenzeit τ zu Erdzeit t können wir einfach die Formel (32) nach t auflösen.

Am einfachsten geht das, wenn ich die rechte Form von (32) dazu verwende um die Umkehrfunktion von arsinh anwenden zu können:

$$\tau=\frac{c}{a}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot t}{c}\right) \tag{33}$$

Zunächst bringe ich c und a auf die linke Seite:

$$\frac{a\cdot\tau}{c}=\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot t}{c}\right) \tag{34}$$

Dann wende ich den $\sinh$ (Sinus Hyperbolikus) auf beiden Seiten an. $\sinh(\operatorname{arsinh}(x))=x$:

(35) $$\sinh\left(\frac{a\cdot\tau}{c}\right) = \frac{a\cdot t}{c}$$

Jetzt noch beide Seiten vertauschen und danach a und c nach rechts bringen:

(36) $$t = \frac{c}{a}\cdot\sinh\left(\frac{a\cdot\tau}{c}\right)$$

Schliesslich kann ich noch den $\sinh$ als Exponentialfunktionen hinschreiben:

(37) $$\boxed{t(\tau) = \frac{c}{a}\cdot\left(\frac{e^{a\cdot\tau/c} - e^{-a\cdot\tau/c}}{2}\right) = \frac{c}{a}\cdot\sinh\left(\frac{a\cdot\tau}{c}\right)}$$

Achtung: Dies ist keine allgemein gültige Umrechnungsformel für die Zeiten. Sie gilt nur für das Beispiel der konstant beschleunigten Rakete!