Bewegungsgleichungen

Dienstag, 26. Juni 2012 - 01:39 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Für die Reise zur Andromeda-Galaxie, welche 2.6 Millionen Lichtjahre von uns entfernt ist, bräuchte ein Raumfahrer in seiner Zeit gemessen "nur" 28.7 Jahre! Für die Menschen auf der Erde würden allerding unterdessen mehr als 2.6 Millionen Jahre vergehen!

Um solche relativistische Berechnungen anstellen zu können, müssen die sogenannten Bewegungsgleichungen aufgestellt und gelöst werden. Bewegungsgleichungen sind Gleichungen oder Gleichungssysteme, mit deren Hilfe man berechnen kann, wie sich Objekte im Laufe der Zeit fortbewegen. Dabei werden äussere Einflüsse wie Kräfte berücksichtigt, welche die Bewegung beeinflussen.[1]

Bewegungsgleichungen sind in der Regel Differentialgleichungen[2]. Viele Naturgesetze können mittels Differentialgleichungen formuliert werden. Eine Differentialgleichung beschreibt das Änderungsverhalten der darin enthaltenen Grössen zueinander. Das Lösen der Differentialgleichungen führt zu Bahngleichungen. Das sind Formeln, die Weg und Geschwindigkeit eines Objektes im Verlaufe der Zeit beschreiben.

Voraussetzungen: Um Bewegungsgleichungen lösen zu können, sind Kenntnisse der Analysis notwendig, insbesondere der Integralrechnung und Differentialrechnung.

Newtonsche Bewegungsgleichung

Bevor ich mich an die relativistische Bewegungsgleichung wage, möchte ich anhand der einfachen newtonschen Bewegungsgleichung zeigen, wie man Differetialgleichungen löst und daraus die Formeln für Geschwindigkeit und Weg eines Objektes berechnet.

(1) $$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$ **Newtonsche Bewegungsgleichung**

Diese Bewegungsgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen Kraft $\vec{F}$, Masse m des Objektes und resultierender Beschleunigung $\vec{a}$, bzw. der Änderung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ oder des Impulses $\vec{p}$ im Verlaufe der Zeit t her. Sie beschreibt also, wie sich die Geschwindigkeit bzw. der Impuls eines Körpers verändert, wenn eine Kraft auf ihn einwirkt.

Die Pfeile über den Symbolen bedeuten, dass die Symbole Vektoren im 3-dimensionalen Raum darstellen. Vektoren haben eine Richtung im Raum und eine Länge, werden aber in der Regel durch drei entsprechende Raumkoordinaten dargestellt[3]:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Die Werte der Koordinaten hängen natürlich vom gewählten Koordinatensystem ab[4]. Durch Transformation[5] (zum Beispiel Rotation) können die Koordinaten von einem Koordinatensystem in ein anderes umgerechnet werden. Man wählt die Koordinatensysteme jeweils so, dass die Länge eines Vektors erhalten bleibt. Das heisst, bei jedem Koordinatensystem stehen die drei Basis-Vektoren senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

Lösen der newtonschen Bewegungsgleichung

Ich bin nicht an der Bewegungsgleichung selbst interessiert, sondern will die daraus resultierende Bewegung des Objektes berechnen. Das heisst, ich will berechnen, wo sich das Objekt zu einem beliebigen Zeitpunkt t befindet und wie schnell es an dieser Stelle ist. Dazu muss ich die Bewegungsgleichung lösen.

Die Lösung der Bewegungsgleichung wird als Bahngleichung bezeichnet. Sie beschreibt die Bahn eines Objektes (auch Trajektorie[6] genannt). In der Regel kann eine Bahngleichung nicht einfach als Formel dargestellt werden. Nur in ganz einfachen Fällen wie in den Beispielen auf dieser Seite ist dies möglich. In komplizierteren Fällen muss die Trajektorie mittels numerischer Verfahren per Computer berechnet werden.

Um die newtonsche Bewegungsgleichung algebraisch lösen zu können, nehme ich folgende Vereinfachungen vor:

- Die Bewegung findet nur entlang der X-Achse statt.
- Die Kraft F_x sei konstant.
- Die Masse m sei konstant.
- Daraus folgt, dass die Beschleunigung $a_x = F_x / m$ ebenfalls konstant ist.

Ich will nun wissen, wie sich die Geschwindigkeit v_x und der zurückgelegte Weg s_x in Abhängigkeit der Zeit T verändert, wenn das Objekt konstant mit a_x beschleunigt wird.

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

Ich lasse den Index x in den folgenden Formeln weg um mir Schreibarbeit zu sparen. Um die Geschwindigkeit $v(T)$ zu berechnen, entnehme ich aus der Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m \cdot a \tag{2}$$

Die Masse m kommt auf beiden Seiten der Gleichung vor und kann daher gestrichen werden. Es bleibt:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \tag{3}$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsänderung $\mathrm{d}v$ in der Zeit $\mathrm{d}t$ und der Beschleunigung a angibt. Wenn ich die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit T wissen will, muss ich diese Gleichung auf beiden Seiten integrieren. Dadurch fällt das Differential auf der Linken Seite weg:

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T a\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Das Integral der linken Seite ergibt:

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = v(T) - v(0) = v(T) - v_0 \tag{5}$$

Das Integral der rechten Seite ergibt:

$$\int_0^T a\,\mathrm{d}t = a \cdot t\Big|_0^T = [a \cdot T] - [a \cdot 0] = a \cdot T \tag{6}$$

Setze ich die roten Teile der Gleichungen (5) und (6) wieder zusammen und löse nach $v(T)$ auf erhalte ich:

$$\boxed{v(T) = a \cdot T + v_0} \tag{7}$$

In diesem Fall war das Integrieren der rechten Seite sehr einfach.

Weg als Funktion der Zeit

Ich möchte nun noch den Weg s als Funktion der Zeit T berechnen. Dazu verwende ich den folgenden einfachen Zusammenhang zwischen Weg und Geschwindigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t) = a \cdot t + v_0 \tag{8}$$

Dies ist wieder eine Differentialgleichung die ich wie oben durch beidseitiges Integrieren lösen kann:

(9) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T [a \cdot t + v_0]\;\mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(10) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = s(T) - s(0) = s(T) - s_0$$

Rechte Seite integrieren:

(11) $$\int_0^T [a \cdot t + v_0]\;\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right]\Bigg|_0^T + [v_0 \cdot t]\Big|_0^T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot T^2 + v_0 \cdot T$$

Die roten Teile der Gleichungen (10) und (11) wieder zusammen setzen und nach $s(T)$ auflösen:

(12) $$\boxed{s(T) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot T^2 + v_0 \cdot T + s_0}$$

Wenn ich Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ und Anfangsweg $s_0 = 0$ setze, lautet die Lösung der newtonschen Bewegungsgleichung bei konstanter Beschleunigung a:

(13) $$\boxed{v(t) = a \cdot t} \qquad \boxed{s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

wobei $v(t)$ = Geschwindigkeit nach der Zeit t
$s(t)$ = Zurückgelegter Weg nach der Zeit t
a = Konstante Beschleunigung

Weitere Informationen

1. Bewegungsgleichung; *Wikipedia*
2. Differentialgleichung; *Wikipedia*
3. Vektor; *Wikipedia*
4. Koordinatensystem; *Wikipedia*
5. Koordinatentransformation; *Wikipedia*
6. Trajektorie; *Wikipedia*