Relativistische Bewegungsgleichungen erklärt

Mittwoch, 27. Juni 2012 - 03:02 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Mit einer Rakete, die konstant mit $1\ g$ beschleunigt wird, was der auf der Erde spürbaren Schwerkraft entspricht, könnten Raumfahrer zu ihren Lebzeiten jeden Punkt im Universum erreichen! Für die Reise zur Andromeda-Galaxie, welche 2.6 Millionen Lichtjahre von uns entfernt ist, bräuchte ein Raumfahrer in seiner Zeit gemessen "nur" 28.7 Jahre! Für die Menschen auf der Erde würden allerding unterdessen mehr als 2.6 Millionen Jahre vergehen!

In diesem Artikel leite ich die Formeln her, mit denen solche Berechnungen angestellt werden können. Mit dem Rechenformular auf der Seite Raketenflug Einstein gegen Newton kannst du auch selbst solche Berechnungen durchspielen.

Inhaltsverzeichnis

Weil dieser Beitrag sehr viele Formeln enthält, habe ich ihn auf mehrere Seiten verteilt. Du kannst jede der Seiten über das Inhaltsverzeichnis rechts jederzeit aufrufen.

Die Seiten bauen auf einander auf. Ich empfehle daher, die Seiten in obiger Reihenfolge zu lesen.

Bewegungsgleichungen

Dienstag, 26. Juni 2012 - 01:39 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Für die Reise zur Andromeda-Galaxie, welche 2.6 Millionen Lichtjahre von uns entfernt ist, bräuchte ein Raumfahrer in seiner Zeit gemessen "nur" 28.7 Jahre! Für die Menschen auf der Erde würden allerding unterdessen mehr als 2.6 Millionen Jahre vergehen!

Um solche relativistische Berechnungen anstellen zu können, müssen die sogenannten Bewegungsgleichungen aufgestellt und gelöst werden. Bewegungsgleichungen sind Gleichungen oder Gleichungssysteme, mit deren Hilfe man berechnen kann, wie sich Objekte im Laufe der Zeit fortbewegen. Dabei werden äussere Einflüsse wie Kräfte berücksichtigt, welche die Bewegung beeinflussen.[1]

Bewegungsgleichungen sind in der Regel Differentialgleichungen[2]. Viele Naturgesetze können mittels Differentialgleichungen formuliert werden. Eine Differentialgleichung beschreibt das Änderungsverhalten der darin enthaltenen Grössen zueinander. Das Lösen der Differentialgleichungen führt zu Bahngleichungen. Das sind Formeln, die Weg und Geschwindigkeit eines Objektes im Verlaufe der Zeit beschreiben.

Voraussetzungen: Um Bewegungsgleichungen lösen zu können, sind Kenntnisse der Analysis notwendig, insbesondere der Integralrechnung und Differentialrechnung.

Newtonsche Bewegungsgleichung

Bevor ich mich an die relativistische Bewegungsgleichung wage, möchte ich anhand der einfachen newtonschen Bewegungsgleichung zeigen, wie man Differetialgleichungen löst und daraus die Formeln für Geschwindigkeit und Weg eines Objektes berechnet.

(1) $$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$ **Newtonsche Bewegungsgleichung**

Diese Bewegungsgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen Kraft $\vec{F}$, Masse m des Objektes und resultierender Beschleunigung $\vec{a}$, bzw. der Änderung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ oder des Impulses $\vec{p}$ im Verlaufe der Zeit t her. Sie beschreibt also, wie sich die Geschwindigkeit bzw. der Impuls eines Körpers verändert, wenn eine Kraft auf ihn einwirkt.

Die Pfeile über den Symbolen bedeuten, dass die Symbole Vektoren im 3-dimensionalen Raum darstellen. Vektoren haben eine Richtung im Raum und eine Länge, werden aber in der Regel durch drei entsprechende Raumkoordinaten dargestellt[3]:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Die Werte der Koordinaten hängen natürlich vom gewählten Koordinatensystem ab[4]. Durch Transformation[5] (zum Beispiel Rotation) können die Koordinaten von einem Koordinatensystem in ein anderes umgerechnet werden. Man wählt die Koordinatensysteme jeweils so, dass die Länge eines Vektors erhalten bleibt. Das heisst, bei jedem Koordinatensystem stehen die drei Basis-Vektoren senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

Lösen der newtonschen Bewegungsgleichung

Ich bin nicht an der Bewegungsgleichung selbst interessiert, sondern will die daraus resultierende Bewegung des Objektes berechnen. Das heisst, ich will berechnen, wo sich das Objekt zu einem beliebigen Zeitpunkt t befindet und wie schnell es an dieser Stelle ist. Dazu muss ich die Bewegungsgleichung lösen.

Die Lösung der Bewegungsgleichung wird als Bahngleichung bezeichnet. Sie beschreibt die Bahn eines Objektes (auch Trajektorie[6] genannt). In der Regel kann eine Bahngleichung nicht einfach als Formel dargestellt werden. Nur in ganz einfachen Fällen wie in den Beispielen auf dieser Seite ist dies möglich. In komplizierteren Fällen muss die Trajektorie mittels numerischer Verfahren per Computer berechnet werden.

Um die newtonsche Bewegungsgleichung algebraisch lösen zu können, nehme ich folgende Vereinfachungen vor:

- Die Bewegung findet nur entlang der X-Achse statt.
- Die Kraft F_x sei konstant.
- Die Masse m sei konstant.
- Daraus folgt, dass die Beschleunigung $a_x = F_x/m$ ebenfalls konstant ist.

Ich will nun wissen, wie sich die Geschwindigkeit v_x und der zurückgelegte Weg s_x in Abhängigkeit der Zeit T verändert, wenn das Objekt konstant mit a_x beschleunigt wird.

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

Ich lasse den Index x in den folgenden Formeln weg um mir Schreibarbeit zu sparen. Um die Geschwindigkeit $v(T)$ zu berechnen, entnehme ich aus der Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m \cdot a \tag{2}$$

Die Masse m kommt auf beiden Seiten der Gleichung vor und kann daher gestrichen werden. Es bleibt:

(3) $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsänderung $\mathrm{d}v$ in der Zeit $\mathrm{d}t$ und der Beschleunigung a angibt. Wenn ich die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit T wissen will, muss ich diese Gleichung auf beiden Seiten integrieren. Dadurch fällt das Differential auf der Linken Seite weg:

(4) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T a\,\mathrm{d}t$$

Das Integral der linken Seite ergibt:

(5) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = v(T) - v(0) = v(T) - v_0$$

Das Integral der rechten Seite ergibt:

(6) $$\int_0^T a\,\mathrm{d}t = a \cdot t\Big|_0^T = [a \cdot T] - [a \cdot 0] = a \cdot T$$

Setze ich die roten Teile der Gleichungen (5) und (6) wieder zusammen und löse nach $v(T)$ auf erhalte ich:

(7) $$\boxed{v(T) = a \cdot T + v_0}$$

In diesem Fall war das Integrieren der rechten Seite sehr einfach.

Weg als Funktion der Zeit

Ich möchte nun noch den Weg s als Funktion der Zeit T berechnen. Dazu verwende ich den folgenden einfachen Zusammenhang zwischen Weg und Geschwindigkeit:

(8) $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t) = a \cdot t + v_0$$

Dies ist wieder eine Differentialgleichung die ich wie oben durch beidseitiges Integrieren lösen kann:

(9) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T [a \cdot t + v_0]\ \mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(10) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = s(T) - s(0) = s(T) - s_0$$

Rechte Seite integrieren:

(11) $$\int_0^T [a \cdot t + v_0]\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right]\Bigg|_0^T + [v_0 \cdot t]\Big|_0^T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot T^2 + v_0 \cdot T$$

Die roten Teile der Gleichungen (10) und (11) wieder zusammen setzen und nach $s(T)$ auflösen:

(12) $$\boxed{s(T) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot T^2 + v_0 \cdot T + s_0}$$

Wenn ich Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ und Anfangsweg $s_0 = 0$ setze, lautet die Lösung der newtonschen Bewegungsgleichung bei konstanter Beschleunigung a:

(13) $$\boxed{v(t) = a \cdot t} \qquad \boxed{s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

wobei $v(t)$ = Geschwindigkeit nach der Zeit t
$s(t)$ = Zurückgelegter Weg nach der Zeit t
a = Konstante Beschleunigung

Weitere Informationen

1. Bewegungsgleichung; *Wikipedia*
2. Differentialgleichung; *Wikipedia*
3. Vektor; *Wikipedia*
4. Koordinatensystem; *Wikipedia*
5. Koordinatentransformation; *Wikipedia*
6. Trajektorie; *Wikipedia*

Bewegungsgleichung der Speziellen Relativitätstheorie

Dienstag, 26. Juni 2012 - 01:41 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Wenn es um Geschwindigkeiten ab einigen Prozenten der Lichtgeschwindigkeit geht, treten mehr und mehr sogenannte relativistische Effekte in Erscheinung: Die Zeit läuft im bewegten System langsamer als im ruhenden und die Längen werden in Bewegungsrichtung kürzer, um nur einige der Effekte zu erwähnen[1].

Im Prinzip wird aber die relativistische Bewegungsgleichung wie die Newtonsche Bewegungsgleichung gelöst. Nur sind die Formeln einiges komplizierter.

In der Regel sind Bewegungsgleichungen so kompliziert, dass sie nur mit numerischen Verfahren[2] gelöst werden können. Das Beispiel einer konstant beschleunigten Rakete ist jedoch einfach genug, sodass die Bewegungsgleichung algebraisch gelöst werden kann.

Vektoren

Zur Herleitung der relativistischen Bewegungsgleichung muss ich zunächst Vierervektoren und deren Ableitung erklären.

Im dreidimensionalen Raum hat ein Vektor[3] bekanntlich drei Komponenten wie hier zum Beispiel der Vektor $\vec{x}$:

$$\vec{x} = x^m = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ein Vektor hat in einem Koordinatensystem KS die drei Koordinaten (x, y, z). In einem anderen Koordinatensystem KS', das gegenüber dem ersten gedreht ist, hat der selbe Vektor andere Koordinaten (x', y', z'). Über eine Rotations-Transformation können die Koordinaten von einem System in das andere umgerechnet werden. Eine Rotations-Transformation ist im Wesentlichen eine Matrix-Multiplikation.

Was aber in beiden Koordinatensystemen gleich bleibt, ist die Länge l des Vektors, die wiefolgt berechnet werden kann:

(1) $$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Die Länge eines Vektors ist invariant bezüglich Rotations-Transformationen oder allgemeiner bezüglich Galilei-Transformationen.

Vierervektoren

Ein Vierervektor ist ein Vektor mit einer Zeit und drei Raumdimensionen und hat ein sog. indefinites Längenquadrat (Intervall)[4]. Letzteres bedeutet, dass auch ein Vierervektor eine invariante Grösse hat, ähnlich der Länge eines 3-D-Vektors. Dieses Längenquadrat ist invariant unter der sog. Lorentz-Transformation[5]. In zwei gegeneinander bewegten Inertialsystemen[6] hängen die Komponenten des Vierervektors durch eine Lorentz-Transformation miteinander zusammen.

Schreibweise

Um Vierervektoren von 3-dimensionalen Vektoren unterscheiden zu können, verwendet man griechische Buchstaben als Index (z.B. μ, sprich *mü*). Diese haben die Werte (0, 1, 2, 3):

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{kontravariant}$$

Dies ist kontravarianter Vierervektor. Die Vierervektoren gibt es in zwei Varianten, kontravariant und kovariant[7]. Beim kovarianten Vektor stehen die Indizes unten. Ein kovarianter Vektor wird zur Unterscheidung oft als Zeilenvektor geschrieben:

$$x_\mu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \qquad \textbf{kovariant}$$

Die Komponenten zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren werden über den sog. Metrik-Tensor[8] $\eta_{\mu\nu}$ in einander transformiert. In der speziellen Relativitätstheorie, wo es um flache Raumzeit geht, ist der Metrik-Tensor einfach $\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, aber darauf brauche ich an dieser Stelle nicht näher einzugehen.

Hinweis: In Texten werden beide Vektorarten meist als Zeilenvektoren geschrieben. Anhand der Position des Index kann ja ein kontravarianter von einem kovarianten Vektor unterschieden werden.

Längenquadrat (Intervall)

Das invariante Längenquadrat (auch Raumzeit-Intervall oder einfach Intervall genannt) ist für Vierervektoren als Skalarprodukt[9] des kovarianten mit dem kontravarianten Vektor definiert:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \cdot \mathrm{d}x^\mu = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 \qquad (2)$$

Im Gegensatz zu 3-D-Vektoren gehen bei den Vierervektoren die Quadrate der drei Raumkoordinaten mit einem Minuszeichen in das Längenquadrat ein!

Nur wenn das Längenquadrat eines 4-dimensionalen Vektors invariant gegenüber der Lorentz-Transformation ist, handelt es sich um einen echten Vierervektor.

Orts-Vierervektor

Die erste Komponente eines Orts-Vierervektors ist die Zeitkoordinate, multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit c, damit diese Koordinate auch die Einheit einer Länge hat.

Die kontravariante Darstellung des Orts-Vierervektors ist:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Dass x^μ ein Vierervektor ist folgt daraus, dass sein Längenquadrat (Intervall) unter der Lorentz-Transformation invariant bleibt. Das indefinite Längenquadrat lautet:

(3) $$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \cdot \mathrm{d}x^\mu = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Was dieses Längenquadrat aussagt ist folgendes: Jedes Ereignis findet in einem Inertialsystem IS an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit statt. Ort und Zeit bilden zusammen die Komponenten eines Ortsvierervektors $x^\mu = (ct, x, y, z)$. In einem anderen Inertialsystem IS', das sich zu IS gleichförmig mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat das selbe Ereignis andere Koordinatenwerte $x^{\mu\prime} = (ct', x', y', z')$. Über die Lorentz-Transformation können diese Werte von einem System in das andere umgerechnet werden. Was jedoch in jedem IS immer gleich bleibt, ist das Längenquadrat:

(4) $$s^2 = \left(c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) = \left(c^2\,t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\right)$$

Vierergeschwindigkeit

Aus dem Orts-Vierervektor x^μ lassen sich weitere Vierervektoren ableiten. Wir benötigen zunächst die Vierergeschwindigkeit u^μ. Diese erhält man durch Differenzieren des Ortsvierervektors x^μ nach der Eigenzeit[10] $\mathrm{d}\tau$.

Die Vierergeschwindigkeit ist definiert als:

(5) $$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

(6) $$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\mathrm{d}\tau$$

(7) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}$$

wobei
u^μ = Vierergeschwindigkeit
x^μ = Orts-Vierervektor
τ = Eigenzeit des bewegten Systems
γ = Lorentzfaktor[11]
t = Zeit des ruhenden Systems
v = Geschwindigkeit des bewegten Systems bezgl. des Ruhesystems
c = Lichtgeschwindigkeit[12]

Zunächst wird in (5) $\mathrm{d}\tau$ durch $\mathrm{d}t$ nach der Formel (6) ersetzt. Dadurch kommt der Lorentzfaktor γ ins Spiel. Dann wird jede Komponente des Ortsvektors nach der Zeit t abgeleitet. Es entsteht ein neuer Vierervektor. Ein Punkt auf einem Buchstaben bedeutet *abgeleitet nach der Zeit*:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Beweis dass Vierergeschwindigkeit ein Vierervektor ist

Ich muss sicher sein, dass die abgeleitete Vierergeschwindigkeit ein Vierervektor ist, das heisst, dass der Betrag des Vektors in allen Inertialsystemen den selben Wert hat, also invariant unter der Lorentz-Transformation ist. Ich berechne daher den Betrag $|u^\mu|$ der Vierergeschwindigkeit:

(8) $$|u^\mu|^2 = u_\mu \cdot u^\mu = \gamma\,(c, -v_x, -v_y, -v_z)\cdot\gamma\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \gamma^2\,\left[c^2 - {v_x}^2 - {v_y}^2 - {v_z}^2\right]$$

Beachte, dass oben das Skalarprodukt[9] des kovarianten mit dem kontravarianten Vektor berechnet wird. Die Terme in der letzten Klammer bilden also keinen Vektor, sondern eine Zahl. Die letzten drei Terme in der Klammer ergeben gerade die negative Länge des räumlichen Geschwindigkeitsvektors im Quadrat:

(9) $$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$$

Also kann ich (8) auch schreiben:

(10) $$|u^\mu|^2 = \gamma^2\ \left[c^2 - \left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right)\right] = \gamma^2\,(c^2 - v^2)$$

Wenn ich jetzt noch γ aus (7) einsetze erhalte ich:

(11) $$|u^\mu|^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{(c^2 - v^2)}{\frac{1}{c^2} \cdot (c^2 - v^2)} = c^2$$

Der Betrag $|u^\mu|$ der Vierergeschwindigkeit u^μ ist somit immer gleich der Lichtgeschwindigkeit c, welche in jedem Inertialsystem per Definition der Relativitätstheorie die selbe ist!

Auch jeder andere Vierervektor, der so abgeleitet wird, muss ein Vierervektor sein! Das nütze ich nun aus:

Viererimpuls

Der klassische Impuls ist definiert als $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Der relativistische Viererimpuls ist analog definiert:

(12) $$p^\mu = m \cdot u^\mu = m \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

wobei

p^μ = relativistischer Viererimpuls
m = Ruhemasse des Körpers
u^μ = Vierergeschwindigkeit
γ = Lorentzfaktor, siehe (7)
c = Lichtgeschwindigkeit
$\vec{v}$ = 3-dimensionaler Geschwindigkeitsvektor (v_x, v_y, v_z)

Beachte: Weil u^μ ein Vierervektor ist, ist auch der Impuls p^μ ein Vierervektor, denn wenn ein Vierervektor mit einem Skalar (im Beispiel die Masse m) multipliziert wird, bleibt er ein Vierervektor, d.h. sein Betrag ist in jedem Inertialsystem der selbe.

Viererkraft und Bewegungsgleichung

Wie beim Viererimpuls kann eine Viererkraft, auch Minkowski-Kraft genannt, analog zur entsprechenden Newton-Kraft $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ definiert werden:

(13) $$\boxed{K^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$ **Bewegungsgleichung der speziellen Relativitätstheorie**

wobei
K^μ = Viererkraft
p^μ = Viererimpuls
u^μ = Vierergeschwindigkeit
τ = Eigenzeit des bewegten Systems
m = Konstante Masse des Objektes

Da der Impuls p^μ ein Vierervektor ist und dieser nach der Eigenzeit τ abgeleitet wird, ist auch die Minkowskikraft K^μ ein echter Vierervektor, dessen Betrag invariant unter der Lorentz-Transformation ist!

Im nächsten Abschnitt werde ich diese Bewegungsgleichung am Beispiel einer gleichförmig beschleunigten Rakete lösen.

Weitere Informationen

1. Relativitätstheorie; *Wikipedia*
2. Numerische Mathematik; *Wikipedia*
3. Vektor; *Wikipedia*
4. Vierervektor; *Wikipedia*
5. Lorentz-Transformation; *Wikipedia*
6. Inertialsystem; *Wikipedia*
7. Kovarianz; *Wikipedia*
8. Metrischer Tensor; *Wikipedia*
9. Skalarprodukt; *Wikipedia*
10. Eigenzeit; *Wikipedia*
11. Lorentzfaktor; *Wikipedia*
12. Lichtgeschwindigkeit; *Wikipedia*

Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete (1)

Dienstag, 26. Juni 2012 - 01:42 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Das Lösen der relativistischen Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete habe ich auf drei Seiten aufgeteilt:

- **Teil 1: Lösen der Differentialgleichung**
- **Teil 2: Zusammenhang von Beschleunigung, Strecke und Zeiten**
- **Teil 3: Längenkontraktion und Raumzeit-Intervall**

Auf dieser Seite geht es um das Lösen der Differentialgleichung und das Berechnen der Geschwindigkeit als Funktion der Erdzeit.

(1) $$\boxed{K^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$ **Bewegungsgleichung der speziellen Relativitätstheorie**

wobei
K^μ = Viererkraft
p^μ = Viererimpuls
u^μ = Vierergeschwindigkeit
τ = Eigenzeit des bewegten Systems
m = Konstante Masse des Objektes

Vereinfachung der Berechnungen

Für die Berechnungen gelten folgende Vorgaben und Vereinfachungen:

Alle Gravitationskräfte werden ignoriert

Daraus folgt, dass die Raumzeit, durch welche die Rakete fliegt, nicht gekrümmt ist. Solange sich die Rakete nicht in der Nähe eines Himmelskörpers befindet, kann die Raumzeitkrümmung vernachlässigt werden und ich kann die Bewegungsgleichung der speziellen Relativitätstheorie anwenden.

Die Masse m der Rakete sei konstant

Dies bewirkt, dass die Masse nicht von der Zeit abhängt und somit die Integrale nicht unnötig kompliziert werden.

Beschleunigung a im Koordinatensystem der Rakete sei konstant

Dies ergibt einfache Integrale, die algebraisch gelöst werden können.

Die Rakete bewege sich nur entlang der X-Achse des ruhenden Systems

Dies reduziert das Problem von drei auf eine Raumdimension plus eine Zeitdimension.

Lorentz-Transformation

Die Beschleunigung a der Rakete und die dafür benötigte Schubkraft F sind nur im Koordinatensystem KS' der Rakete konstant. Um Kraft und Beschleunigung ins ruhende System umzurechnen, muss ich die Lorentz-Transformation Λ_v anwenden. Ich mache ab jetzt die Vereinfachung, dass es nur noch eine Raum-Dimension gibt:

(2) $$K^\mu = \begin{pmatrix} K^0 \\ K^1 \end{pmatrix} = \Lambda_v \cdot K^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K^{0'} \\ K^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

wobei

K^μ	=	Viererkraft im ruhenden System
$K^{\mu'}$	=	Viererkraft im Raketen-System
Λ_v	=	Lorentz-Transformation, die von v abhängig ist
$K^{0'}$	=	Zeitkomponente der Kraft im Raketen-System (Leistung $K^{0'} = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$, A = Arbeit)
$K^{1'}$	=	Raumkomponente der Kraft im Raketen-System
F	=	Die Rakete beschleunigende konstante Kraft

Wenn ich die Lorentz-Transformation[1] Λ_v anwende erhalte ich die Kraftkomponenten im ruhenden System:

(3) $$K^0 = \gamma \cdot \left(K^{0'} + \frac{v}{c} \cdot K^{1'} \right) = \gamma \cdot \frac{v}{c} \cdot F = \frac{v}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot F$$

(4) $$K^1 = \gamma \cdot \left(K^{1'} + \frac{v}{c} \cdot K^{0'} \right) = \gamma \cdot F = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot F$$

Die Zeitkomponente der Kraft K^0 entspricht der Leistung (Arbeit pro Zeit) und hat für meine Berechnungen keine Bedeutung. Die X-Komponente der Kraft K^1 kann ich jetzt in die relativistische Bewegungsgleichung einsetzen. Die relativistische Bewegungsgleichung lautet:

(5) $$\boxed{K^\mu = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}}$$

Mich interessiert nur die X-Komponente, also:

(6) $$K^1 = m \cdot \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau}$$

Links kann ich $K^1 = \gamma \cdot F$ einsetzen und rechts kann ich $\mathrm{d}\tau$ durch $\mathrm{d}t/\gamma$ ersetzen:

(7) $$\gamma \cdot F = m \cdot \gamma \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^1 \qquad \Rightarrow \qquad F = m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u^1$$

Auf jeder Seite konnte ich ein γ streichen. Laut Formel (5, Vierergeschwindigkeit) gilt: $u^1 = \gamma \cdot v_x = \gamma \cdot v$. Dies kann ich oben einsetzen und erhalte:

Lösen der Differentialgleichung

(8) $$\boxed{F = m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\gamma \cdot v(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} \right)}$$

Um das Differential in (8) rechts zum Verschwinden zu bringen, integriere ich beide Seiten:

(9) $$\int_0^T F \,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} \right) \mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(10) $$\int_0^T F \,\mathrm{d}t = [F \cdot t] \Big|_0^T = [F \cdot T] - [F \cdot 0] = F \cdot T$$

Rechte Seite integrieren:

(11) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} \right) \mathrm{d}t = \left[\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} \right] \Bigg|_0^T = \left[\frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1 - \frac{v(T)^2}{c^2}}} \right] - \left[\frac{m \cdot v(0)}{\sqrt{1 - \frac{v(0)^2}{c^2}}} \right]$$

Da die Geschwindigkeit am Anfang Null ist gilt $v(0) = 0$ und das rechte Integral ist somit schliesslich:

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m \cdot v(t)}{\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}t = \frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}} \tag{12}$$

Schliesslich kann ich die roten Resultate von (10) und (12) einander wieder gleichsetzen:

$$F \cdot T = \frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}} \tag{13}$$

Wenn ich in (13) die Kraft F durch die Beschleunigung $F = m \cdot a$ ausdrücke, kann ich die Masse m auf beiden Seiten streichen und ich habe eine Formel, in der nur noch a, c, $v(T)$ und T vorkommt:

$$m \cdot a \cdot T = \frac{m \cdot v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad a \cdot T = \frac{v(T)}{\sqrt{1-\frac{v(T)^2}{c^2}}} \tag{14}$$

Diese Formel kann ich nun nach $v(t)$ auflösen (ich benne T wieder in t um) und erhalte schliesslich die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, womit ich die Lösung der Bewegungsgleichung habe.

> Bruch nach links und linke Seite rechts in Nenner bringen:
>
> $$\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{v(t)}{a \cdot t} \tag{15}$$
>
> Beide Seiten quadrieren:
>
> $$1-\frac{v(t)^2}{c^2} = \frac{v(t)^2}{a^2 \cdot t^2} \tag{16}$$
>
> Alle Terme mit $v(t)$ auf linke Seite, Rest auf rechte Seite:
>
> $$\frac{v(t)^2}{a^2 \cdot t^2} + \frac{v(t)^2}{c^2} = 1 \tag{17}$$
>
> Linke Seite auf gleichen Nenner bringen und $v(t)^2$ ausklammern:

(18) $$\frac{v(t)^2 \cdot c^2 + v(t)^2 \cdot a^2 \cdot t^2}{a^2 \cdot c^2 \cdot t^2} = v(t)^2 \cdot \left(\frac{c^2 + a^2 \cdot t^2}{a^2 \cdot c^2 \cdot t^2} \right) = 1$$

Bruch auf rechte Seite bringen und etwas umformen (c^2 ausklammern):

(19) $$v(t)^2 = \frac{a^2 \cdot c^2 \cdot t^2}{c^2 + a^2 \cdot t^2} = \frac{c^2 \cdot (a^2 \cdot t^2)}{c^2 \cdot \left(1 + (\frac{a \cdot t}{c})^2\right)} = \frac{a^2 \cdot t^2}{(\frac{a \cdot t}{c})^2 + 1}$$

Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen (in unserem Beispiel interessiert uns nur die positive Lösung):

(20) $$v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{(\frac{a \cdot t}{c})^2 + 1}}$$

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

Für konstante Beschleunigung a und Startgeschwindigkeit $v_0 = 0$ erhalte ich:

(21) $$\boxed{v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{(\frac{a \cdot t}{c})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(a \cdot t)^2} + \frac{1}{c^2}}}}$$

wobei	$v(t)$	=	Geschwindigkeit nach Ablauf der Erdzeit t
	a	=	konstante Beschleunigung in der Rakete
	t	=	bisher vergangene Zeit auf der Erde
	c	=	Lichtgeschwindigkeit

Für die Geschwindigkeit v an der Position s der Reise von der Erde aus gemessen wird in der Rakete jeweils der selbe Wert wie auf der Erde gemessen. Die Uhren auf der Erde und in der Rakete zeigen an dieser Position jedoch verschiedene Zeiten an. Wir können die Geschwindigkeit auch in Bezug zur Raketenzeit τ berechnen, wenn wir den Zusammenhang zwischen t und τ verwenden (siehe Umrechnung Raketenzeit in Erdzeit):

(22) $$\boxed{v(\tau) = \frac{a \cdot t(\tau)}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t(\tau)}{c}\right)^2 + 1}}}$$

mit $t(\tau) = \frac{c}{a} \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \tau}{c}\right)$

wobei $v(\tau)$ = Geschwindigkeit gemessen nach Ablauf der Zeit τ in der Rakete
a = konstante Beschleunigung in der Rakete
τ = bisher vergangene Zeit in der Rakete
c = Lichtgeschwindigkeit

Betrachten wir die Formel (21) etwas genauer. Mich interessiert insbesondere, wie sich die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit verhält, wenn die Rakete noch viel langsamer als Lichtgeschwindigkeit fliegt und ob die Rakete nach dieser Formel die Lichtgeschwindigkeit jemals erreicht oder nicht.

Nichtrelativistischer Geschwindigkeitsbereich

Von nichtrelativistischer Geschwindigkeit spricht man, wenn eine Geschwindigkeit v viel kleiner als Lichtgeschwindigkeit c ist. Mathematisch schreibt man das:

$v \ll c$ sprich: v ist viel kleiner als c

Um herauszufinden, wie sich die Formel (21) verhält, wenn $v \ll c$ gilt, müssen wir schauen, ob es in der Formel Terme gibt, die in diesem Fall vernachlässigt werden können. In der Formel (21) kommt nach dem Gleichheitszeichen kein v vor, das wir mit c vergleichen könnten. Aber es gilt: $v = a \cdot t$ und $a \cdot t$ kommt rechts vom Gleichheitszeichen vor. Wir schauen daher, wie sich die Formel verhält, wenn $a \cdot t \ll c$ ist.

Für diese Abschätzung ist der linke Teil der Formel (21) hilfreich:

(23) $$v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\frac{(a \cdot t)^2}{c^2} + 1}}$$

Betrachten wir den Bruch in der Wurzel. Wenn $a \cdot t \ll c$ ist, zum Beispiel sei $a \cdot t = 0.001 \cdot c$, dann gilt:

(24) $$\frac{(a \cdot t)^2}{c^2} = \frac{(0.001 \cdot c)^2}{c^2} = \frac{0.000001 \cdot c^2}{c^2} = 0.000001 \ll 1$$

Wir sehen, dass dieser Bruch für kleine Geschwindigkeiten sehr viel kleiner als 1 wird und deshalb gegenüber der 1 in der Wurzel vernachlässigt werden kann. Wir erhalten also als Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten:

(25) $$v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\frac{(a \cdot t)^2}{c^2} + 1}} \approx \frac{a \cdot t}{\sqrt{1}} = a \cdot t \qquad \Big| \, a \cdot t \ll c$$

Die resultierende Formel $v(t) = a \cdot t$ ist genau die Formel nach Newtons Theorie. Newtons Formel ist also in der relativistischen Formel als Grenzfall für langsame Geschwindigkeiten enthalten. Erst bei hohen Geschwindigkeiten kommen Terme zum tragen, die eine Abweichung von Newtons Vorhersagen ergeben.

Geschwindigkeitslimit c

Was passiert nun, wenn wir sehr, sehr lange beschleunigen? Nach (25) könnten wir beliebige Geschwindigkeiten weit über der Lichtgeschwindigkeit erhalten, wenn wir nur lange genug beschleunigen.

Nicht so jedoch bei der relativistischen Formel (21):

Für die Betrachtung, was passiert, wenn wie sehr, sehr lange beschleunigen, ist der rechte Teil der Formel (21) hilfreich:

(26) $$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(a \cdot t)^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Wenn wir sehr lange beschleunigen bedeutet das, dass t bzw. $a \cdot t$ sehr gross werden, im Extremfall gegen Unendlich streben. Dann wird der erste Bruch unter der Wurzel $1/\infty = 0$ und wir erhalten als Grenzfall:

(27) $$v(t) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{0 + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c \qquad \Big| \, t \to \infty$$

Wir bekommen also als Grenzfall für unendliche lange Beschleunigung Lichtgeschwindigkeit c. Diese kann also nie ganz erreicht oder gar überschritten werden.

Dies ist eine komplett andere Vorhersage als das Resultat aus Newtons Theorie! Bei Newton gibt es kein Limit für die Geschwindigkeit.

Weitere Informationen

1. Lorentz-Transformation; *Wikipedia*

Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete (2)

Dienstag, 16. April 2013 - 01:57 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Das Lösen der relativistischen Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete habe ich auf drei Seiten aufgeteilt:

- **Teil 1: Lösen der Differentialgleichung**
- **Teil 2: Zusammenhang von Beschleunigung, Strecke und Zeiten**
- **Teil 3: Längenkontraktion und Raumzeit-Intervall**

Auf dieser Seite werden einige Zusammenhänge zwischen Beschleunigung, Strecke und Zeiten berechnet, jeweils aus Sicht der Erde und der Rakete.

Beschleunigung der Rakete von der Erde aus gesehen

Die Rakete wird vom Inertialsystem der Rakete IS' aus gesehen mit der konstanten Beschleunigung a beschleunigt. Wie gross ist diese Beschleunigung von der Erde aus gesehen? Da die Rakete nie Lichtgeschwindigkeit erreichen kann, muss die Beschleunigung a_E von der Erde aus gesehen gegen Null gehen.

Um die Beschleunigung a_E zu berechnen leite ich die Formel (1) für die Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit t ab (2):

(1) $$\boxed{v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}}$$

(2) $$a_E(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}$$

> Wurzel als Potenz schreiben und dann die Kettenregel für Ableitungen anwenden:
>
> (3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ at \left[\left(\frac{at}{c} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} =$$
>
> $$a \left[\left(\frac{at}{c} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} + at \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{at}{c} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \left(\frac{at}{c} \right) \frac{a}{c} \right\}$$

Rechte Seite zusammenfassen:

(4) $$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a\left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1\right]^{-\frac{1}{2}} - a\left(\frac{at}{c}\right)^2\left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1\right]^{-\frac{3}{2}}$$

Um eine bessere Übersicht zu erhalten, substituiere ich $x = (at/c)$ und schreibe die Klammern mit negativem Exponenten unter den Bruchstrich:

(5) $$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{ax^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

Beide Terme auf den selben Nenner bringen, dann kann der Zähler vereinfacht werden:

(6) $$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{a\,(x^2+1) - ax^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} = \frac{a}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Wenn ich für x wieder (at/c) einsetze, erhalte ich:

(7) $$\boxed{a_E(t) = \frac{a}{\left[\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1\right]^{3/2}}}$$

wobei

a_E = Beschleunigung der Rakete von der Erde aus gesehen

t = bisher vergangene Zeit auf der Erde

v = Geschwindigkeit der Rakete

a = konstante Beschleunigung in der Rakete

c = Lichtgeschwindigkeit

Strecke als Funktion der Erdzeit

Mich interessiert jetzt, welche Strecke legt die Rakete in der Zeit t zurück, wenn sie konstant mit a beschleunigt.

Einerseits kenne ich jetzt die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit $v(t)$, andererseits kenne ich den Zusammenhang zwischen Weg s und Geschwindigkeit (du erinnerts dich an Weg als Funktion der Zeit beim Beispiel nach Newton?):

(8) $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}$$

Ich muss wieder beide Seiten integrieren, damit sich das Differential auf der linken Seite löst:

(9) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(10) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = s(T) - s(0) = s(T) - s_0$$

Rechte Seite integrieren:

(11) $$\int_0^T \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]\Bigg|_0^T = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot T}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]$$

Die Stammfunktion oben rechts habe ich mit einem Computerprogramm ermittelt. Wenn ich die beiden roten Terme von (10) und (11) wieder zusammensetze, wobei ich die Startbedingung $s_0 = 0$ setze, erhalte ich:

(12) $$\boxed{s(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]}$$

wobei
s = Zurückgelegter Weg von der Erde aus gesehen
t = bisher vergangene Zeit auf der Erde
a = konstante Beschleunigung in der Rakete
c = Lichtgeschwindigkeit

Zeit für Strecke im ruhenden System

Wenn ich eine Strecke s vorgebe und wissen will, wie lange von der Erde aus gesehen die Rakete für diese Strecke braucht, so kann ich die Formel (12) nehmen und nach t auflösen.

> Ich gehe von der Formel (12) aus:

(13) $$s = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]$$

Erstes Ziel: Freistellen der Wurzel. Dazu multipliziere ich beide Seiten mit a und dividiere beide Seiten durch c^2. Danach Addiere ich auf beiden Seiten 1 und erhalte:

(14) $$\frac{a \cdot s}{c^2} + 1 = \sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}$$

Ich vertausche nun die beiden Seiten:

(15) $$\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} = \frac{a \cdot s}{c^2} + 1$$

Beide Seiten quadrieren und dann von beiden Seiten 1 abziehen:

(16) $$\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1$$

Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen, wobei nur die positive Lösung Sinn macht:

(17) $$\frac{a \cdot t}{c} = \sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1}$$

Jetzt muss nur noch t isoliert werden, indem auf beiden Seiten mit c multipliziert und durch a dividiert wird:

(18) $$\boxed{t(s) = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1}}$$

wobei

wobei	$t(s)$	=	Flugzeit für die Strecke s von der Erde aus gemessen
	s	=	bisher zurückgelegter Weg der Rakete von der Erde aus gemessen
	a	=	konstante Beschleunigung in der Rakete
	c	=	Lichtgeschwindigkeit

Zeitdehnung der Rakete

Unter Vierergeschwindigkeit habe ich einen Zusammenhang zwischen $\mathrm{d}\tau$ und $\mathrm{d}t$ hingeschrieben:

(19) $$\mathrm{d}\tau(t) = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \cdot \mathrm{d}t \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}$$

Wenn ich jetzt $v(t)$ aus (1) in (19) rechts einsetze erhalte ich nach etwas umformen:

(20) $$\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \frac{a^2\,t^2}{c^2\left[\left(\frac{at}{c}\right)^2 + 1\right]}} = \sqrt{1 - \frac{a^2\,t^2}{a^2\,t^2 + c^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{(a^2\,t^2 + c^2) - a^2\,t^2}{a^2\,t^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2\,t^2 + c^2}} =$$

(21) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}}$$

wobei $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ = Verlangsamung der Raketenzeit nach Ablauf der Erdzeit t

a = konstante Beschleunigung in der Rakete

c = Lichtgeschwindigkeit

Mit der Formel (21) kann man ausrechnen, wievielmal langsamer die Uhr in der Rakete läuft als die Uhr auf der Erde. Dieser Wert ist von der Reisedauer t und der Beschleunigung der Rakete a abhängig. Je länger die Rakete beschleunigt wird, umso mehr nähert sich ihre Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit und umso langsamer vergeht in der Rakete die Zeit.

Wenn $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ zum Beispiel den Wert 0.5 ergibt, so läuft die Zeit in der Rakete nur noch halb so schnell wie auf der Erde.

Umrechnung Erdzeit in Raketenzeit

Die Formel (21) kann ich gleich verwenden für eine Formel, mit der von Erdzeit t in Raketenzeit τ umgerechnet werden kann. Ich muss nur (21) auf beiden Seiten integrieren:

(22) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t$$

Linke Seite integrieren:

(23) $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \tau(t)\Big|_0^T = \tau(T) - \tau(0) = \tau(T) - \tau_0$$

Rechte Seite integrieren (die Stammfunktion $F(t)$ habe ich mit einem Computerprogramm bestimmt):

(24) $$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t = F(t)\Big|_0^T = -\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{(a\cdot t)^2 + c^2} - a\cdot t\right)\Bigg|_0^T =$$

Grenzen einsetzen $F(T) - F(0)$:

(25) $$\left[-\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{(a\cdot T)^2 + c^2} - a\cdot T\right)\right] - \left[-\frac{c}{a}\cdot\ln(c)\right] =$$

Terme in eckiger Klammer tauschen:

(26) $$\frac{c}{a}\cdot\ln(c) - \frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{(a\cdot T)^2 + c^2} - a\cdot T\right)$$

Die beiden Logarithmen nach der Regel $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$ zusammenfassen und c unter den Bruchstrich bugsieren:

(27) $$\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\frac{c}{\sqrt{(a\cdot T)^2 + c^2} - a\cdot T}\right) = \frac{c}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\cdot T}{c}\right)^2 + 1} - \left(\frac{a\cdot T}{c}\right)}\right)$$

Zur besseren Übersicht der folgenden Umformungen substituiere ich:

(28) $$x = \left(\frac{a\cdot T}{c}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{c}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\right)$$

Ich möchte den Nenner vereinfachen. Dort habe ich jetzt eine Differenz: $(a - b) = \sqrt{x^2+1} - x$. Wenn ich Zähler und Nenner mit $(a + b) = (\sqrt{x^2+1} + x)$ multipliziere:

(29) $$\frac{c}{a}\cdot\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}\right] =$$

erhalte ich im Nenner ein Binom der Form $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, wobei $a^2=(\sqrt{x^2+1})^2$ und $b^2=(x)^2$ ist, also:

(30) $$\frac{c}{a}\cdot\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(x)^2}\right]=\frac{c}{a}\cdot\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{(x^2+1)-x^2}\right]=\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

Wenn ich für $x=(a\cdot T/c)$ rückeinsetze erhalte ich zusammengefasst:

(31) $$\int_0^T\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)^2+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{\left(\frac{a\cdot T}{c}\right)^2+1}+\left(\frac{a\cdot T}{c}\right)\right)=\frac{c}{a}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot T}{c}\right)$$

Rote Terme von (23) und (31) wieder gleichsetzen und $\tau_0=0$ setzen ergibt, wenn ich für T wieder t schreibe:

(32) $$\boxed{\tau(t)=\frac{c}{a}\cdot\ln\left(\sqrt{\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)^2+1}+\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)\right)=\frac{c}{a}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)}$$

Achtung: Dies ist keine allgemein gültige Umrechnungsformel für die Zeiten. Sie gilt nur für das Beispiel der konstant beschleunigten Rakete!

Umrechnung Raketenzeit in Erdzeit

Zur Umrechnung von Raketenzeit τ zu Erdzeit t können wir einfach die Formel (32) nach t auflösen.

Am einfachsten geht das, wenn ich die rechte Form von (32) dazu verwende um die Umkehrfunktion von arsinh anwenden zu können:

(33) $$\tau=\frac{c}{a}\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)$$

Zunächst bringe ich c und a auf die linke Seite:

(34) $$\frac{a\cdot\tau}{c}=\operatorname{arsinh}\left(\frac{a\cdot t}{c}\right)$$

Dann wende ich den $\sinh$ (Sinus Hyperbolikus) auf beiden Seiten an. $\sinh(\operatorname{arsinh}(x))=x$:

(35) $$\sinh\left(\frac{a \cdot \tau}{c}\right) = \frac{a \cdot t}{c}$$

Jetzt noch beide Seiten vertauschen und danach a und c nach rechts bringen:

(36) $$t = \frac{c}{a} \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \tau}{c}\right)$$

Schliesslich kann ich noch den $\sinh$ als Exponentialfunktionen hinschreiben:

(37) $$\boxed{t(\tau) = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{e^{a \cdot \tau / c} - e^{-a \cdot \tau / c}}{2}\right) = \frac{c}{a} \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \tau}{c}\right)}$$

Achtung: Dies ist keine allgemein gültige Umrechnungsformel für die Zeiten. Sie gilt nur für das Beispiel der konstant beschleunigten Rakete!

Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete (3)

Dienstag, 16. April 2013 - 01:57 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Das Lösen der relativistischen Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete habe ich auf drei Seiten aufgeteilt:

- **Teil 1: Lösen der Differentialgleichung**
- **Teil 2: Zusammenhang von Beschleunigung, Strecke und Zeiten**
- **Teil 3: Längenkontraktion und Raumzeit-Intervall**

Auf dieser Seite geht es um die Längenkontraktion der Reisestrecke aus Sicht der Rakete und die Berechnung der Raumzeit-Intervalle aus Sicht der Erde und der Rakete.

Längenkontraktion

Wenn man mit all den hergeleiteten Formeln mit Hilfe des Rechenformulars Flugberechnungen (Raketenflug Einstein gegen Newton) einige Beispiele durchrechnet, fällt auf, dass die Astronauten in ihrer Zeit Strecken zurücklegen können, die aus ihrer Sicht nur mit Überlichtgeschwindigkeit zu schaffen wären. Zum Beispiel wird eine $8.5\ \mathrm{Lj}$ lange Strecke in nur 4.59 Jahren Astronautenzeit zurückgelegt. Dies wäre aber nur möglich, wenn die Astronauten aus ihrer Sicht mit fast 2-facher Lichtgeschwindigkeit fliegen würden!

Wie ist das möglich? Wo liegt der Hund begraben?

Die Lösung dieses Problems liegt in der **Längenkontraktion** der speziellen Relativitätstheorie. Bezüglich eines ruhenden Systems werden Strecken eines bewegten Systems in Flugrichtung gestaucht:

(1) $$s' = s \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

wobei s' = Länge des bewegten Objektes gemessen im Ruhesystem
s = Länge des bewegten Objektes gemessen im bewegten System
v = relative Geschwindigkeit der beiden Systeme
c = Lichtgeschwindigkeit

Aus der Sicht der Erde wird die Rakete nach obiger Formel gestaucht, was uns hier aber nicht weiter hilft. Wie sieht die Sache aus der Sicht der Astronauten aus?

Aus der Sicht der Astronauten befinden sie sich in einem ruhenden System (wenn wir die Beschleunigung mal kurz anhalten) und der Weltraum bewegt sich mit der Geschwindigkeit v an ihnen vorüber. Das bedeutet aber, dass der Weltraum aus ihrer Sicht in Flugrichtung gestaucht ist. Die Strecke zu ihrem Ziel ist daher für die Astronauten bei hohen Geschwindigkeiten wesentlich kürzer als für die Erdenbewohner. Obwohl für die Astronauten die Zeit langsamer vergeht als auf der Erde, erreichen sie ihr Ziel in der kürzeren Zeit, ohne die Lichtgeschwindigkeit je überschreiten zu müssen.

Diese Längenkontraktion ist auch der Grund dafür, weshalb die Erdenbewohner und die Astronauten genau die selbe Lichtgeschwindigkeit messen. Die Geschwindigkeit wird gemessen, indem man die Zeit t misst in der ein Lichtstraht die Strecke l abfliegt. Die Lichtgeschwindigkeit ist dann $c = l/t$.

Nehmen wir an, auf der Erde und in der Rakete befinden sich je ein Massstab der Länge l. Der Massstab wird in Bewegungsrichtung hingelegt. Um die Lichtgeschwindigkeit zu messen, wird jeweils die Zeit gemessen, die ein Lichtstrahl braucht, um den Massstab zu passieren.

Da von der Erde aus gesehen die Zeit in der Rakete zum Beispiel nur halb so schnell vergeht, passiert der Lichtstrahl für die Astronauten den Massstab in der Hälfte der Erdzeit. Wenn wir davon ausgehen, dass beide Massstäbe gleich lang sind, muss also das Licht in der Rakete doppelt so schnell sein, um den Massstab in der halben Zeit zu passieren. Die spezielle Relativitätstheorie postuliert aber, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen die selbe ist.

Der Widerspruch lässt sich nur lösen, wenn man akzeptiert, dass der Massstab in der Rakete in diesem Beispiel in Bewegungsrichtung um den Faktor zwei geschrumpft ist. Dann muss das Licht in der Rakete nur noch die Hälfte der Strecke in der halben Zeit zurücklegen.

Es resultiert daraus die selbe Lichtgeschwindigkeit für alle Beobachter:

(2) $$l' = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$ **Längenkontraktion**

(3) $$t' = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$ **Zeitdilation**

(4) $$\frac{l'}{t'} = \frac{l \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l}{t} = c$$

wobei l = Länge des Massstabs auf der Erde
l' = Länge des Massstabs in der Rakete von der Erde aus gesehen
t = Zeit auf der Erde
t' = Zeit in der Rakete von der Erde aus gesehen

v = Geschwindigkeit der Rakete

c = Lichtgeschwinigkeit

Distanz aus der Sicht der Rakete

Ich möchte nun noch berechnen, wie gross die zurückgelegte Strecke aufgrund der Längenkontraktion aus der Sicht der Astronauten ist. Da die Rakete in ihrem System konstant beschleunigt, sind die entsprechenden Formeln recht kompliziert.

Die Geschwindigkeit der Rakete ändert sich laufend. Ich kann die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit der Astronautenzeit τ nach der Formel (22, Geschwindigkeit als Funktion der Zeit) für jeden Zeitpunkt berechnen:

(5) $$v(\tau) = \frac{a \cdot t(\tau)}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\, t(\tau)\right)^2 + 1}} = \frac{c \cdot \sinh(\frac{a}{c} \cdot \tau)}{\sqrt{\sinh(\frac{a}{c} \cdot \tau)^2 + 1}}$$

Die momentane Geschwindigkeit $v(\tau)$ ist der Quotient der Wegänderung $\mathrm{d}s_R(\tau)$ aus Sicht der Rakete durch die Raketenzeit $\mathrm{d}\tau$:

(6) $$\frac{\mathrm{d}s_R(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = v(\tau)$$

Wenn wir beide Seiten integrieren, erhalten wir den aus der Sicht der Rakete zurückgelegten Weg $s_R(\tau)$ nach Ablauf der in der Rakete angezeigten Zeit τ:

(7) $$s_R(\tau) = \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}s_R(\tau')}{\mathrm{d}\tau'}\, \mathrm{d}\tau' = \int_0^\tau v(\tau')\, \mathrm{d}\tau' = \int_0^\tau \frac{c \cdot \sinh(\frac{a}{c} \cdot \tau')}{\sqrt{\sinh(\frac{a}{c} \cdot \tau')^2 + 1}}\, \mathrm{d}\tau'$$

Nach der Integration erhalte ich die gewünschte Formel:

> Um das Integral zu vereinfachen, substituiere ich:
>
> (8) $$\frac{a}{c} \cdot \tau' = x' \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{d}\tau' = \frac{c}{a} \cdot \mathrm{d}x' \qquad\qquad x = \frac{a}{c} \cdot \tau$$
>
> Damit erhalte ich:

(9) $$s(x) = \frac{c^2}{a} \cdot \int_0^x \frac{\sinh(x')}{\sqrt{\sinh(x')^2 + 1}}\, dx'$$

Das Integral bestimme ich mit einem Computerprogramm und erhalte:

(10) $$\int_0^x \frac{\sinh(x')}{\sqrt{\sinh(x')^2 + 1}}\, dx' = \left[\ln\left(e^{2x'} + 1\right) - x'\right]\Big|_0^x =$$

$$\left[\ln\left(e^{2x} + 1\right) - x\right] - \left[\ln\left(e^{0} + 1\right) - 0\right] = \ln\left(e^{2x} + 1\right) - x - \ln(2) =$$

(11) $$\int_0^x \frac{\sinh(x')}{\sqrt{\sinh(x')^2 + 1}}\, dx' = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{2}\right) - x$$

Durch Rücksubstitution von (8) erhalte ich:

(12) $$\boxed{s_R(\tau) = \frac{c^2}{a} \cdot \left[\ln\left(\frac{e^{2 \cdot a \cdot \tau / c} + 1}{2}\right) - \frac{a \cdot \tau}{c}\right]}$$

wobei

$s_R(\tau)$ = Von der Rakete zurückgelegte Strecke aus Sicht der Astronauten nach Ablauf der Zeit τ in der Rakete

a = konstante Beschleunigung in der Rakete

c = Lichtgeschwindigkeit

Das Raumzeit-Intervall

Das **Raumzeit-Intervall** ist eine invariante Grösse. Das heisst, sie muss für zwei Ereignisse in jedem Koordinatensystem den selben Wert haben. Wenn zwei Koordinatensysteme sich unbeschleunigt gegeneinander bewegen und wir nur eine Raumrichtung betrachten, kann das Intervall wiefolgt berechnet werden:

(13) $$(\Delta s)^2 = (\Delta t \cdot c)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta t' \cdot c)^2 - (\Delta x')^2$$

wobei

Δs = Raumzeit-Intervall

Δt = Zeitunterschied zwischen zwei Ereignissen im Ruhesystem

Δx = Distanz zwischen zwei Ereignissen im Ruhesystem

$\Delta t'$ = Zeitunterschied zwischen den selben zwei Ereignissen vom bewegten System aus gesehen

$\Delta x'$	=	Distanz zwischen den selben zwei Ereignissen vom bewegten System aus gesehen
c	=	Lichtgeschwindigkeit in $\mathrm{Lj/j}$

oder einfacher ausgedückt:

(14) $$(Intervall)^2 = (zeitlicher\,Abstand)^2 - (r\ddot{a}umlicher\,Abstand)^2$$

Ein Raumzeit-Intervall setzt sich aus zwei Ereignissen zusammen. Ein Ereignis hat immer eine Position und eine Zeit. Position und Zeit beziehen sich immer auf ein bestimmtes Inertialsystem. In jedem Inertialsystem kann der zeitliche und räumliche Abstand zweier Ereignisse unterschiedlich sein, das daraus gebildete Intervall ist aber in allen Inertialsystemen gleich! Man sagt, das Raumzeit-Intervall ist eine invariante Grösse.

Da in unserem Fall die Rakete beschleunigt wird, handelt es sich beim Raketen-System nicht um ein Inertialsystem. In diesem Fall müssen wir das Intervall in lauter infinitesimal kleine Stückchen $\mathrm{d}s$ zerlegen und diese Stückchen addieren, d.h. über $\mathrm{d}s$ integrieren.

Für einen infinitesimalen Vierer-Vektor $\mathrm{d}x$ ist das Intervall allgemein wiefolgt definiert:

(15) $$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_\mu \cdot \mathrm{d}x^\mu = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2}$$

wobei	$\mathrm{d}s$	=	Raumzeit-Intervall
	$\mathrm{d}x_\mu$	=	Kovarianter Vierer-Vektor
	$\mathrm{d}x^\mu$	=	Kotravarianter Vierer-Vektor
	$\mathrm{d}x^0$	=	Zeit-Komponente $c \cdot \mathrm{d}t$
	$\mathrm{d}x^1$	=	X-Komponente
	$\mathrm{d}x^2$	=	Y-Komponente
	$\mathrm{d}x^3$	=	Z-Komponente

In unserem Beispiel sind X- und Y-Komponenten gleich Null. Da ich für die X-Komponente das Symbol s verwendet habe, gebe ich dem Intervall den Namen I. Damit wird das Intervall für unser Beispiel:

(16) $$\boxed{[\mathrm{d}I(\lambda)]^2 = [c \cdot \mathrm{d}t(\lambda)]^2 - [\mathrm{d}s(\lambda)]^2}$$

wobei	$\mathrm{d}I(\lambda)$	=	Infinitesimales Intervall an der Stelle λ
	λ	=	Kurvenparameter

c = Lichtgeschwindigkeit

$\mathrm{d}t(\lambda)$ = Infinitesimaler zeitlicher Abstand an der Stelle λ

$\mathrm{d}s(\lambda)$ = Infinitesimaler räumlicher Abstand an der Stelle λ

Nachfolgend berechne ich das Raumzeit-Intervall für das Erden-System und das Raketen-System, um zu überprüfen, ob es in beiden Systemen identisch ist:

Raumzeit-Intervall im Erden-System

Als Kurvenparameter kann ich die Erden-Zeit t verwenden, denn ich habe alle nötigen Formeln als Funktion der Zeit t bereits berechnet. Das Intervall I im Erden-System ist:

(17) $$I(T) = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{c \cdot \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

mit $$\left(\frac{c \cdot \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right) = c \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right) = v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}$$

(18) $$I(T) = \int_0^T \sqrt{c^2 - \frac{a^2 \cdot t^2}{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{\frac{c^2 \cdot \left[\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1\right] - a^2 \cdot t^2}{\left[\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1\right]}}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^T \sqrt{\frac{a^2 \cdot t^2 + c^2 - a^2 \cdot t^2}{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{\frac{c^2}{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t$$

und schliesslich:

(19) $$I(T) = c \cdot \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\,\mathrm{d}t$$

Das ist aber bis auf den Faktor c das selbe Integral wie bei (22, Umrechnung Erdzeit in Raketenzeit). Dessen Berechnung ergibt schliesslich für das Intervall:

$$\boxed{I(T) = \frac{c^2}{a} \cdot \ln\left(\sqrt{\left(\frac{a \cdot T}{c}\right)^2 + 1} + \left(\frac{a \cdot T}{c}\right)\right) = \frac{c^2}{a} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{a \cdot T}{c}\right)} \tag{20}$$

Raumzeit-Intervall im Raketen-System

Das Raumzeit-Intervall der Rakete bezeichne ich mit $I'(T)$. Bezüglich des Koordinatensystems der Rakete bewegen sich die Astronauten nicht (der Weltraum zieht an ihnen vorbei). Deshalb ist der räumliche Abstand $\mathrm{d}s'(t)$ des Intervalls konstant gleich Null. Damit ergibt sich folgende Formel:

$$I'(T) = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{c \cdot \mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}s'(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\, \mathrm{d}t \tag{21}$$

mit $$\frac{\mathrm{d}s'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Den verbleibenden Term $\mathrm{d}\tau(t)/\mathrm{d}t$ haben wir in (22, Umrechnung Erdzeit in Raketenzeit) berechnet:

$$I'(T) = c \cdot \int_0^T \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t = c \cdot \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}\, \mathrm{d}t \tag{22}$$

Wir erhalten damit das selbe Integral wie bei (19) und damit auch die selbe Lösung:

$$\boxed{I'(T) = \frac{c^2}{a} \cdot \ln\left(\sqrt{\left(\frac{a \cdot T}{c}\right)^2 + 1} + \left(\frac{a \cdot T}{c}\right)\right) = \frac{c^2}{a} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{a \cdot T}{c}\right)} \tag{23}$$

Damit ist gezeigt, dass das Intervall in beiden Systemen identisch ist!

Hinweis: Das Intervall I durch c dividiert ergibt die Eigenzeit $\tau(T)$ der Rakete zum Zeitpunkt T.