AR: Grundlagen der Gravitation

In der klassischen Physik wird die **Gravitation** durch eine Feldtheorie beschrieben. Seit der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitation durch die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit beschrieben. Die räumlichen und zeitlichen Koordinaten werden als gleichberechtigt betrachtet, alle Änderungen werden nunmehr als geometrisches Problem behandelt.

Die Gravitation bewirkt die gegenseitige Anziehung von Massen und allen anderen Energieformen aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie. Die Reichweite der Gravitation ist unbegrenzt und sie lässt sich nicht abschirmen. Daher bestimmt sie die grossräumige Verteilung der Masse im Universum.

Auf den folgenden Seiten werden die verschiedenen Interpretationen der Gravitation mit einander verglichen und einige Berechnungen damit angestellt.

- **Wirkung dunkler Energie**
- **Nabla-Operator**
- **Gravitationsfeld nach Newton**
- **Gauss-Gesetz der Gravitation**
- **Divergenzsatz**
- **Divergenz des Gravitationsfeldes im Vakuum**
- **Gravitationsfeld eines Planeten**
- **Äquivalenzprinzip**
- **Lichtkrümmung**
- **Gezeitenkräfte**
- **Euklidische Geometrie**

Wirkung dunkler Energie

Das Universum dehnt sich nach neuesten Erkenntnissen exponentiell aus. Exponentielle Expansion bedeutet, beschleunigte Ausdehnung. Das Universum wird also nicht nur gleichmässig immer grösser und grösser, sondern die Geschwindigkeit, mit der das Universum grösser wird, nimmt exponentiell zu. Diese Expansion scheint im Widerspruch zu jeder Gravitationstheorie zu stehen.

Wie könnte man diese Expansion erklären?

Man könnte sich eine abstossende Kraft vorstellen. Diese Kraft müsste allerding sehr, sehr klein sein, denn sonst würden Planeten nicht um ihre Sonnen kreisen und Galaxien würden auseinander brechen. Erst in Abständen, die der Grösse des Universums gleich sind, dürfte sich die abstossende Kraft bemerkbar machen.

Eine solche Kraft bringt man mit der sog. kosmologischen Konstanten Λ (Lambda) in Verbindung, welche Einstein früher in seine Feldgleichungen einführte, um ein damals vermeintlich angenommenes statisches Universum zu erklären. Der Ursprung einer solchen Kraft ist die Dunkle Energie.

Diese abstossende Kraft dürfte zudem nicht wie die Gravitation proportional zu $1/r^2$ sein, denn sonst wäre sie auf grosse Entfernungen immer kleiner und hätte gar keine Wirkung mehr, wenn sie schon in einem Sonnensystem keinen Einfluss haben soll. Vielmehr müsste diese Kraft mit dem Abstand r zunehmen.

Modell: Zwei Teilchen mit Feder

Wie würde sich eine solche Kraft, die mit dem Abstand zunimmt, auf die Gravitation auswirken? Dies kann man am Modell zweier Teilchen untersuchen, die mit einer Feder verbunden sind.

Die Federkraft nimmt linear mit dem Abstand zwischen den Teilchen zu:

(1) $$F = -k \cdot r$$

wobei F = Federkraft
k = Federkonstante
r = Abstand der Teilchen

Das Minuszeichen bedeutet, dass es sich im eine anziehende Kraft handelt, die Kraft wirkt entgegen der Dehnung der Feder. Wie würde sich eine kosmologische Konstante auf dieses Modell auswirken?

Die kosmologische Konstante würde eine Kraft auf das Modell ausüben, die genau von der in (1) gezeigten Art ist, also proportional zum Abstand der Teilchen, jedoch abstossend, nicht anziehend:

(2) $$F = -k \cdot r + \lambda \cdot r = -(k - \lambda) \cdot r$$

Der Wert für λ wäre sehr klein. Die Wirkung wäre also gleich, wie wenn eine etwas schwächere Feder mit der Federkonstante $(k - \lambda)$ verwendet würde. Die Anziehungskraft der Feder wird also um λ verkleinert.

Nun, dieses Modell ist nicht ganz zu vergleichen mit Planeten, die von der Sonne angezogen werden, da die Anziehungskraft mit dem Abstand im Quadrat abnimmt und nicht mit dem Abstand proportional zunimmt.

Wie würde sich eine solche kosmologische Konstante denn auf Planten und Sternensysteme auswirken?

Sie würde die Anziehungskraft ein klein wenig verkleinern, der Gleichgewichts-Abstand der Teilchen wäre ganz wenig grösser und Planeten würden etwas langsamer um ihre Sonnen kreisen und Galaxien wären ein klein wenig grösser usw. Aber die Kraft der kosmologischen Konstante wäre so klein, dass sie die Anziehungskraft in galaktischen Abständen nicht überschreiten würde, sodass Galaxien nicht auseinander brechen.

Big Rip Theorie

Die meisten Physiker betrachten die kosmologische Konstante Λ als konstant. Es gibt jedoch auch eine Theorie, in der $\Lambda(t)$ eine Funktion der Zeit ist. In der Big Rip Theorie nimmt Λ mit der Zeit zu. Dadurch fällt das Universum irgend wann auseinander. Zuerst entfernen sich die Galaxien von einander, dann brechen die Galaxien auseinander, dann die Sonnensysteme, schliesslich sogar die Sonnen und Planeten und die Atome.

- **Big Rip**; *Wikipedia (en)*

FAQ

Hängt die kosmologische Konstante von der Materie im Universum ab? Würde sie auch existieren, wenn keine Materie im Universum wäre?

Susskind: Die kosmologische Konstante ist unabhängig von Materie. Ohne Materie hätte sie jedoch nichts, auf das sie wirken könnte. Die meisten Physiker nehmen heute an, dass die kosmologische Konstante das ist, was ihr Name aussagt: konstant.

Könnte Λ keine Konstante sein?

Susskind: Es würde keine sehr grossen physikalischen Prinzipien verletzen, wenn Λ mit der Zeit kleiner würde. Es würde jedoch grosse Prinzipien verletzen, wenn Λ mit der Zeit immer grösser werden würde.

Wie kann es sein, dass eine so schwache Kraft ein ganzes Universum expandieren lässt?

Susskind: Die dunkle Energie in diesem Raum ist extrem klein. Ein Kubikmeter enthält dunkle Energie in der Grössenordnung von 1'000 Protonen. Die Anziehungskraft von 1'000 Protonen ist wirklich vernachlässigbar. Aber wenn man diese Dichte über das ganze Universum verteilt, kann die Auswirkung dramatisch werden. Die Gravitation von Protonen ist anziehend. Die Kraft der dunklen Energie jedoch abstossend. Dunkle Energie hat also einen Effekt auf das globale Universum, nicht jedoch auf Solarsysteme, noch nicht einmal auf Galaxien. Der Wert von Λ ist so klein, dass er erst einen Einfluss bekommt bei Distanzen wie dem Radius des Universums.

Wenn Leute die dunkle Energie anzapfen wollen um damit die Energiekrise zu lösen, müssen sie mit der Tatsache leben, dass sie, um die Energie eines Benzintanks zu erhalten, ein Volumen anzapfen müssten, das etwa der Umlaufbahn des Mondes entspricht. Da gibt es also nur sehr wenig Energie und nebenbei keinen Weg, diese anzuzapfen.

Besteht dunkle Energie aus Teilchen?

Nein. Dunkle Energie sollte nicht mit Dunkler Materie verwechselt werden, welche aus Teilchen besteht.

Nabla-Operator

Um Newtons Theorie der Gravitation zu verstehen, muss ein bestimmter Formalismus verstanden werden:

Vektoren sind Objekte, die aus mehreren Komponenten zusammen gesetzt sind:

$$\vec{v} \quad \leftrightarrow \quad (v_x, v_y, v_z) \tag{1}$$

Im Beispiel (1) besteht der Vektor $\vec{v}$ aus drei Komponenten, seinen x, y, und z Koordinaten (v_x, v_y, v_z).

Es gibt aber noch andere vektorähnliche Objekte, deren Komponenten jedoch nicht Zahlen sind, sondern Operationen bzw. Funktionen. Der Nabla-Operator ∇ (englisch als *Del* ausgesprochen) ist so ein Objekt:

$$\vec{\nabla} \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{2}$$

Immer wenn der Nabla-Operator in einer Formel vorkommt bedeutet das, dass etwas differenziert (abgeleitet) werden muss. Genauer, eine Reihe von partiellen Differentialen.

Wie wird der Differential-Operator $\vec{\nabla}$ angewandt?

Gradient: Nabla-Operator mit Skalarfeld

Anwenden des Nabla-Operators auf ein Skalarfeld $\Phi(x, y, z)$:

$$\boxed{\vec{\nabla}\Phi(x, y, z) \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)} \tag{3}$$

Der Nabla-Operator macht aus einem Skalar einen Vektor oder aus einem Skalarfeld ein Vektorfeld. Der Vektor wird als Gradient bezeichnet. Er gibt an, wie stark sich ein Skalarfeld an einer Stelle ändert und zeigt in die Richtung der grössten Änderung.

Divergenz: Nabla-Operator Skalarprodukt mit Vektor-Feld

Anwenden des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld mit der Skalarprodukt Schreibweise. Das Skalarprodukt (Zeichen $\cdot$) zweier Vektoren ist folgendermassen definiert:

(4) $$\vec{w} \cdot \vec{v} = w_x v_x + w_y v_y + w_z v_z$$

Das Skalarprodukt ist also eine Zahl, eben ein Skalar. Analog sieht das beim Skalarprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektor aus:

(5) $$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Der Nabla-Operator macht über das Skalarprodukt aus dem Vektor $\vec{v}$ einen Skalar. Dieser Skalar wird Divergenz des Vektors genannt. Eine ebenfalls gebräuchliche Schreibweise ist $\mathbf{div}\vec{v}$. Beim Nabla-Operator wird der Pfeil oft weggelassen: $\nabla \cdot \vec{v}$.

Wenn der Vektor $\vec{v}$ von der Position abhängig ist: $\vec{v}(x, y, z)$, dann stellt er ein Vektor-Feld dar. Die zugehörige Divergenz ist entsprechend ein Skalar-Feld. Immer wenn ein Objekt von der Position abhängig ist, stellt es ein Feld dar.

(6) $$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x, y, z) \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \Phi(x, y, z)}$$

Es wird also die Vektor-Komponente v_x, welche von den Argumenten x, y, z abhängig ist ($v_x(x, y, z)$) nach x abgeleitet, die Komponente $v_y(x, y, z)$ nach y und die Komponente $v_z(x, y, z)$ nach z und die drei Werte werden addiert. Dies ergibt einen neuen einzelnen Wert $\Phi(x, y, z)$ für jede Stelle (x, y, z) im Raum, also ein Skalarfeld.

Gravitationsfeld nach Newton

Ein Gravitationsfeld ist ein Vektorfeld. Es definiert an jeder Stelle des Raumes einen Vektor, der in die Richtung zeigt, in der eine Testmasse aufgrund der anderen Massen im Raum beschleunigt wird. Die Länge des Vektors, also sein Betrag, entspricht der Stärke der Beschleunigung und die Richtung des Vektors zeigt die Richtung der Beschleunigung der Testmasse an.

Das Gravitationsfeld kann aus Newtons Gravitationsgesetz hergeleitet werden:

(1) $$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

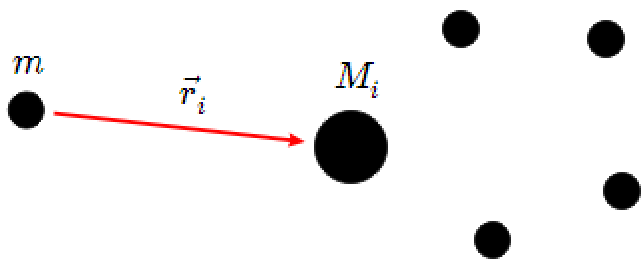
wobei	F	=	Anziehungskraft zwischen Masse 1 und Masse 2
	m	=	Masse 1, unsere spätere Testmasse
	M	=	Masse 2
	G	=	Gravitationskonstante
	r	=	Abstand zwischen Masse 1 und Masse 2

Um die Beschleunigung g zu erhalten, die unsere Testmasse m spürt, kann die newtonsche Formel $F = m \cdot a$ angewandt werden, wobei $a = g$ ist:

(2) $$F = m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Dies ist der Betrag der Beschleunigung zur Masse M hin, wenn die Testmasse den Abstand r zur Masse M hat.

Diese Formel kann in Vektorform gebracht werden und für beliebig viele Massen erweitert werden:



Dazu wird zunächst der Beschleunigungs-Vektor $\vec{g}_i$ berechnet. Er gibt die Beschleunigung der Testmasse m zur Masse M_i an. Der Abstand zur Masse M_i ist r_i und die Richtung der Beschleunigung ist $\vec{r}_i$.

(3) $$\vec{g}_i = G \cdot \frac{M_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

(3) entspricht also dem Gravitationsfeld, wenn nur die Masse M_i vorhanden ist. Der Ausdruck $\vec{r}_i / r_i$ ergibt einen Einheitsvektor, der in Richtung M_i zeigt. Um das totale Gravitationsfeld aufgrund aller

vorhandenen Massen zu erhalten, können alle so berechneten einzelnen Beschleunigungsvektoren vektoriell addiert werden:

(4) $$\boxed{\vec{g}(\mathbf{x}) = G \cdot \sum_i \frac{M_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}}$$ **Gravitationsfeld nach Newton**

wobei

wobei	$\vec{g}(\mathbf{x})$	=	Gravitationsfeld aufgrund aller Massen
	M_i	=	i-te Masse
	G	=	Gravitationskonstante
	$\vec{r}_i$	=	Vektor von der Testmasse m zur Masse M_i
	r_i	=	Länge des Vektors $\vec{r}_i$

Der Vektor $\vec{g}$ ist generell für jeden Punkte im Raum verschieden. Es handelt sich bei $\vec{g}(\mathbf{x})$ also um ein Vektorfeld. $\mathbf{x}$ steht für:

(5) $$\mathbf{x} = \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

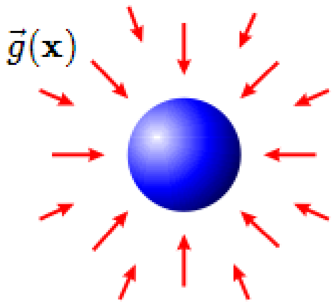
Die Schreibweise x^i ist eine übliche Notation für Vektorkomponenten und ist nicht zu verwechseln mit dem Potenzieren!

Weitere Informationen

- **Gravitationsfeld**; *Wikipedia (de)*
- **Gravitation field**; *Wikipedia (en)*
- **Newton's law of universal gravitation**; *Wikipedia (en)*

Gauss-Gesetz der Gravitation

Das Gravitationsfeld $\vec{g}(\mathbf{x})$ um eine einzelne Masse variiert mit der Position und zeigt immer zum Zentrum der Masse (siehe Bild). Das hineinzeigen auf einen Punkt nennt man Divergenz des Feldes. Die Masse ist die Ursache für die Divergenz des Feldes und die Divergenz ist proportional zur Masse. An jedem Punkt gibt es eine Divergenz, welche proportional zur Masse an diesem Punkt ist.



Um dies mathematisch formulieren zu können, wird das Konzept der Massen-Dichte eingeführt. Wenn man sich Masse auf sehr viele im Raum verteilte winzig kleine Masseteilchen vorstellt, bedeutet Massendichte ρ einfach:

(1) $$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

wobei ρ = Massendichte
Δm = die Masse in einem bestimmten Volumen ΔV
ΔV = Volumenelement

Die Massendichte variiert von Ort zu Ort. An einer Stelle ist keine Masse, an einer anderen wenig wieder an einer anderen viel. Die Massendichte ist also eine Funktion des Ortes $\mathbf{x}$ und somit ist ρ ein Skalarfeld, ein sog. Dichte-Feld.

Die Beziehung zwischen der Divergenz des Gravitationsfeldes $\nabla \cdot \vec{g}(\mathbf{x})$ und dem Dichtefeld $\rho(\mathbf{x})$ ist wiefolgt:

(2) $$\boxed{\nabla \cdot \vec{g}(\mathbf{x}) = -4\pi G \rho(\mathbf{x})}$$ **Gauss-Gesetz der Gravitation**

wobei ∇ = Nabla-Operator
$\vec{g}$ = Gravitationsfeld am Punkt $\mathbf{x}$
G = Gravitationskonstante
ρ = Massendichte am Punkt $\mathbf{x}$

Beachte: Das Gravitationsfeld ist ein Vektorfeld, aber seine Divergenz ist ein Skalarfeld. Das Skalarprodukt von ∇ mit dem Vektorfeld $\vec{g}$ erzeugt ein Skalarfeld. Das Gauss-Gesetz ist also eine Feldgleichung. Es zeigt die Beziehung zwischen zwei Feldern.

Das Gauss-Gesetz der Gravitation sagt physikalisch das Selbe aus wie das Gravitationsfeld nach Newton. Die Stärke des Gravitationsfeldes ist immer proportional zur Gravitationskonstante G und proportional zur Masse, ausgedrück durch ρ und der Wert ist immer negativ oder Null. Das bedeutet, die Divergenz ist eingentlich eine Konvergenz.

Nach dem Gauss-Gesetz muss die Divergenz eines Gravitationsfeldes im Vakuum $(\rho = 0)$ Null sein. Den Nachweis fundest du auf der Seite:

- **Divergenz des Gravitationsfeldes im Vakuum**

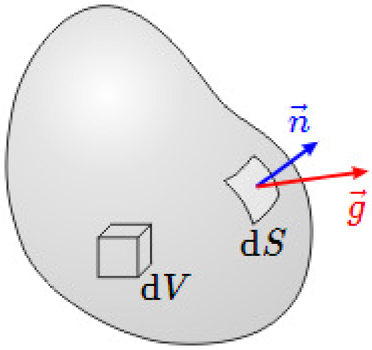
Weitere Informationen

- **Gauss' law for gravity**; *Wikipedia (en)*

Divergenzsatz

Der **Divergenzsatz** oder **Satz von Gauss**, ist ein Ergebnis aus der Vektoranalysis. Er stellt einen Zusammenhang her zwischen der Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{g}$ im Volumen V und dem Fluss des Feldes durch die Oberfläche S des Volumens V.

Der Divergenzsatz folgt als Spezialfall aus dem Satz von Stokes, der wiederum den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verallgemeinert.



Wir gehen von einem Vektorfeld $\vec{g}$ aus, das eine Divergenz $\nabla \cdot \vec{g}$ hat. Dazu stellen wir uns ein beliebiges geschlossenes Volumen V vor, das einen Teil des Feldes einschliesst (siehe Bild). Das Volumen hat eine Oberfläche S. Diese Oberfläche können wir uns zusammengesetzt aus lauter infinitesimal kleinen Flächenelementen $\mathrm{d}S$ vorstellen. Jedes dieser Flächenelemente hat einen Einheits-Normalenvektor $\vec{n}$, der nach aussen zeigt.

Der Divergenzsatz sagt nun folgendes aus:

(1) $$\boxed{\int_V \nabla \cdot \vec{g}\, \mathrm{d}V = \oint_S \vec{g} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S}$$ **Satz von Gauss bei einem Gravitationsfeld**

wobei	$\vec{g}$	=	Gravitationsfeld
	$\nabla \cdot \vec{g}$	=	Divergenz des Feldes
	$\vec{n}$	=	Einheits-Normalenvektor auf dem Oberflächenelement $\mathrm{d}S$
	$\vec{g} \cdot \vec{n}$	=	Feldkomponente in Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$
	$\mathrm{d}V$	=	infinitesimales Volumenelement
	V	=	ganzes Volumen
	$\mathrm{d}S$	=	infinitesimales Oberflächenelement
	S	=	ganze Oberfläche

Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ist das Integral der Divergenz $\nabla \cdot \vec{g}$, also die Summe der Divergenz in allen Volumenelementen $\mathrm{d}V$. Auf der rechten Seite steht ein Flächenintegral. Der Integrand $\vec{g} \cdot \vec{n}$ ist ein Skalarprodukt zweier Vektoren, also ein Skalar. $\vec{n}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf einem infinitesimal kleinen Oberflächenelement $\mathrm{d}S$ steht und die Länge 1 hat. Wenn man den Feldvektor $\vec{g}$, der an dieser Stelle der Oberfläche des Volumens steht, skalar mit diesem Normalenvektor multipliziert, erhält man den Anteil des Feldes $\vec{g}$, der in Richtung $\vec{n}$ wirkt. Die Anteile von $\vec{g}$, die nicht in Richtung $\vec{n}$ zeigen, haben keinen Einfluss auf das was im Volumen passiert. Alle diese senkrechten Anteile $\vec{n} \cdot \vec{g}$ werden nun aufsummiert über die ganze Oberfläche. Man nennt dies den Fluss (englisch flux) der Gravitation oder Gravitationsfluss durch die Oberfläche.

Der Satz von Gauss sagt also aus, dass die totale Divergenz des Gravitationsfeldes in einem beliebigen Volumen gleich dem Fluss dieses Feldes durch die Oberfläche dieses Volumens ist.

Wenn man einen Vergleich mit Wasser zieht, so bedeutet der Satz von Gauss einfach, dass die Menge des Wassers, das durch unsichtbare Zuleitungen in das Volumen gepumpt wird, gleich der Menge des Wassers ist, das durch die Oberfläche dieses Volumens fliesst. Das Volumen soll dabei gleich bleiben.

Es ist bemerkenswert, dass ein Gravitationsfeld in dieser Hinsicht offenbar gleich beschrieben werden kann, wie eine nicht komprimierbare Flüssigkeit.

Weitere Informationen

- **Divergence theorem**; *Wikipedia (en)*

Divergenz des Gravitationsfeldes im Vakuum

Nach dem Gauss-Gesetz der Gravitation muss die Divergenz eines Gravitationsfeldes im leeren Raum Null sein, wenn dort die Massedichte ρ Null ist.

(1) $$\boxed{\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho}$$ **Gauss-Gesetz der Gravitation**

wobei
∇ = Nabla-Operator
$\vec{g}$ = Gravitationsfeld
G = Gravitationskonstante
ρ = Massendichte an jedem Punkt

Dass die Divergenz des Gravitationsfeldes an jedem beliebigen Punkt ausserhalb einer Masse gleich Null sein soll, ist nicht sofort ersichtlich. Daher berechne ich hier die Divergenz im Abstand r zu einem Planeten mit der Masse M. Das entsprechende Gravitationsfeld nach Newton ist:

(2) $$\vec{g} = -\frac{MG}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{MG}{r^3}\vec{r}$$

Ich lege den Ursprung des Koordinatensystems ins Zentrum des Planeten, sodass gilt:

(3) $$\vec{r} = (x, y, z) \qquad \textbf{und} \qquad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Zur Vereinfachung der Formeln definiere ich noch:

(4) $$q = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = q^{1/2}$$

$$K = -MG$$

Damit erhalten wir für die einzelnen Komponenten des Gravitationsfeldes:

(5) $$g_x = Kq^{-3/2}x \qquad g_y = Kq^{-3/2}y \qquad g_z = Kq^{-3/2}z$$

Jetzt berechnen wir damit die Divergenz:

(6) $$\nabla \cdot \vec{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

Da die Komponenten sich sehr ähnlich sind, reicht es eine Komponente zu differenzieren, die anderen können dann entsprechend hingeschrieben werden. Ich führe die Differenzierung hier an der Komponente g_x durch. Dabei dividiere ich zunächst beide Seite durch K, damit es übersichlicher zugeht:

(7) $$\frac{1}{K}\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x q^{-3/2}$$

Anwendung der Produktregel ergibt:

(8) $$\frac{1}{K}\frac{\partial g_x}{\partial x} = \left\{\frac{\partial}{\partial x} x\right\} q^{-3/2} + x \left\{\frac{\partial}{\partial x} q^{-3/2}\right\}$$

$$\frac{1}{K}\frac{\partial g_x}{\partial x} = \{1\}\ q^{-3/2} + x \left\{\left[-\frac{3}{2} q^{(-1-3/2)}\right]\frac{\partial q}{\partial x}\right\} \qquad \text{mit} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{1}{K}\frac{\partial g_x}{\partial x} = q^{-3/2} - \frac{3}{2} x\, q^{(-1-3/2)} 2x$$

Nach dem Zusammenfassen und multiplizieren beider Seiten mit K erhalten wir:

(9) $$\frac{\partial g_x}{\partial x} = Kq^{-3/2} - 3Kq^{-3/2} q^{-1} x^2$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial y} = Kq^{-3/2} - 3Kq^{-3/2} q^{-1} y^2$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial z} = Kq^{-3/2} - 3Kq^{-3/2} q^{-1} z^2$$

Die y- und z-Komponenten sind analog und habe ich einfach darunter geschrieben. Jetzt müssen wir diese Komponenten nur noch addieren, um die Divergenz zu erhalten:

(10) $$\nabla \cdot \vec{g} = 3Kq^{-3/2} - 3Kq^{-3/2} q^{-1} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$(x^2 + y^2 + z^2)$ ist nach (4) gerade q^1 und es lässt sich mit q^{-1} kürzen. Somit bleibt:

(11) $$\nabla \cdot \vec{g} = 3Kq^{-3/2} - 3Kq^{-3/2} = 0$$

Die Divergenz eines Gravitationsfeldes im leeren Raum ist also tatsächlich Null. Da sich

Gravitationsfelder von mehreren Massen einfach überlagern lassen, gilt dies auch, wenn beliebig viele Massen vorhanden sind!

Gravitationsfeld eines Planeten

Mit Hilfe des Satz von Gauss und dem Gauss-Gesetz der Gravitation lässt sich das Gravitationsfeld ausserhalb und innerhalb eines Planeten berechnen.

Gravitationsfeld ausserhalb eines Planeten

Ein Planet ist ein rotationssymetrisches Gebilde und daher besonders einfach zu berechnen. Zur Vereinfachung kann man sich die Masse im Inneren des Planeten als gleichmässig (homogen) verteilt vorstellen. Dies spielt jedoch nur bei der Berechnung des Gravitationsfeldes innerhalb des Planeten eine Rolle.

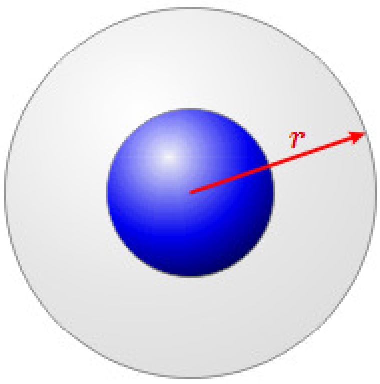
Zur Berechnung des Gravitationsfeldes $\vec{g}$ im Abstand r vom Zentrum des Planeten kann man den Satz von Gauss und das Gauss-Gesetz verwenden. Der Satz von Gauss stellt einen Zusammenhang her zwischen der Divergenz $\nabla \cdot \vec{g}$ des Feldes $\vec{g}$ im Volumen $V(r)$ und dem Fluss des Feldes durch die Oberfläche $S(r)$. Das Gauss-Gesetz liefert uns den Zusammenhang zwischen Divergenz und Massendichte ρ des Planeten. Aus diesen beiden Zusammenhängen lässt sich der Gravitationsfluss in Abhängigkeit der Massendichte bzw. der Masse des Planeten berechnen. Bei einem kugelförmigen Volumen, dessen Zentrum im Zentrum des Planeten liegt, ist der Fluss $\vec{g} \cdot \vec{n}$ gerade die gesuchte Stärke $g(r)$ des Gravitationsfeldes im Abstand r zum Planetenzentrum.

(1) $$\boxed{\int_V \nabla \cdot \vec{g} \, \mathrm{d}V = \oint_S \vec{g} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S}$$ **Satz von Gauss**

(2) $$\boxed{\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho}$$ **Gauss-Gesetz**

Zur Berechnung der linken Seite von (1): Das Gauss-Gesetz (2) liefert einen Ausdruck für $\nabla \cdot \vec{g}$. Das kann in (1) links eingesetzt werden, wobei die Konstanten vor das Integral gesetzt werden können:

(3) $$\int_V \nabla \cdot \vec{g} \, \mathrm{d}V = \int_V -4\pi G \rho \, \mathrm{d}V = -4\pi G \int_V \rho \, \mathrm{d}V$$



Das Integral der Massendichte ρ über das ganze Volumen der Kugel mit Radius r ergibt gerade die Masse M des Planeten, solange r grösser als der Radius R des Planeten ist:

(4) $$\int_V \rho \, \mathrm{d}V = M \qquad \Big| \; r > R$$

Dies in (3) eingesetzt erhält man für die linke Seite des Satzes von Gauss:

(5) $$\int_V \nabla \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}V = -\,4\pi GM$$

Auf der rechten Seite des Satzes von Gauss (1) steht im Integral der Ausdruck $\vec{g} \cdot \vec{n}$. Dies ist die Normal-Komponente g_n des Vektors $\vec{g}$, also die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche der Kugel mit Radius r wirkt. Der Vektor $\vec{g}$ zeigt immer zum Zentrum des Planeten hin, ändert also von Ort zu Ort seine Richtung. Die Länge g_n des Vektors ist aber dank der Kugelsymmetrie und der isotropen Massenverteilung innerhalb der Kugel bei einem bestimmten Abstand r immer gleich, also konstant, und kann daher vor das Integral gesetzt werden. Die rechte Seite von (1) wird somit:

(6) $$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = g_n \oint_S \mathrm{d}S \qquad \text{mit} \qquad \vec{g} \cdot \vec{n} = g_n = \text{const}$$

Das verbleibende Integral ist nichts anderes als die Oberfläche der Kugel mit Radius r:

(7) $$\oint_S \mathrm{d}S = 4\pi r^2$$ **Kugeloberfläche**

Die rechte Seite des Satzes von Gauss ist somit:

(8) $$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = g_n 4\pi r^2$$

Zusammenfassung: Wir haben nun die linke und rechte Seite des Satzes von Gauss berechnet:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{g}\,\mathrm{d}V = -\,4\pi GM$$ **Satz von Gauss linke Seite**

$$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = g_n 4\pi r^2$$ **Satz von Gauss rechte Seite**

Nach dem Gleichsetzen der linken und rechten Seite erhält man:

(9) $$-\,4\pi GM = g_n 4\pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad g_n 4\pi r^2 = -4\pi GM$$

Kürzen mit 4π und Lösen nach g_n ergibt:

(10) $$\boxed{g_n = -\frac{GM}{r^2}}$$

Dies ist nichts anderes als die Newton Formel für die Gravitation! Das Minus-Zeichen bedeutet, dass das Gravitationsfeld zum Planeten hin zeigt, nicht von ihm weg.

Diese Herleitung von Newtons Gesetz der Gravitation zeigt, dass es keine Rolle spielt, ob die Masse des Planeten auf den ganzen Planet verteilt ist oder in einem einzigen Punkt im Zentrum konzentriert ist. Das Integral der Massendichte über das Volumen mit Radius r (4) ist immer das selbe, solange $r > R$ ist.

Gravitationsfeld innerhalb eines Planeten

Das Gravitationsfeld innerhalb eines Planeten kann genau gleich wie oben berechnet werden. Es muss nur beachtet werden, dass das Volumenintegral über die Massendichte (4) nicht mehr die Masse des ganzen Planeten ergibt, sondern nur noch die Masse der Kugel mit Radius $r < R_{\text{Planet}}$. Zur Vereinfachung der Berechnung wird die Massendichte ρ innerhalb des Planeten als gleichmässig (homogen) verteilt angenommen.

Satz von Gauss

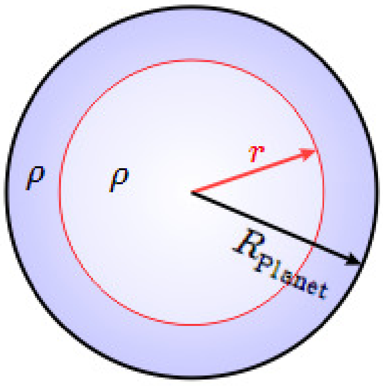
$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \vec{g}\, \mathrm{d}V = \oint_S \vec{g} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S}$$

Gauss-Gesetz

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{g} = - 4\pi G \rho}$$

Berechnen wir zunächst wieder die linke Seite des Satzes von Gauss, indem wir das Gauss-Gesetz einsetzen. Da die Massedichte ρ als konstant angenommen wird, kann ρ vor das Integral gesetzt werden:

(11) $$\int_V \nabla \cdot \vec{g}\, \mathrm{d}V = \int_V - 4\pi G \rho\, \mathrm{d}V = - 4\pi G \rho \int_V \mathrm{d}V$$



Diesmal kann nicht einfach $\int \rho\, dV = M$ gesetzt werden, da in der Kugel mit Radius r nicht mehr die ganze Planetenmasse M enthalten ist.

Das Integral oben rechts stellt das Volumen der Kugel mit Radius r dar:

(12) $$\int_V \mathrm{d}V = \frac{4\pi}{3} r^3$$ **Kugelvolumen**

In (11) eingesetzt erhalten wir:

(13) $$\int_V \nabla \cdot \vec{g}\, \mathrm{d}V = -\, 4\pi G\rho \left[(4/3)\pi r^3\right]$$

Für die rechte Seite des Satzes von Gauss gelten die selben Aussagen wie beim Gravitationsfeld ausserhalb des Planeten. Wir erhalten daher wieder die selbe Formel wie unter (8):

(14) $$\oint_S \vec{g} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = g_n 4\pi r^2$$

Setzen wir die beiden rechten Seiten von (13) und (14) in den Satz von Gauss ein, so erhalten wir:

(15) $$-\, 4\pi G\rho (4/3)\pi r^3 = g_n 4\pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad g_n 4\pi r^2 = -4\pi r^2 G\rho (4/3)\pi r$$

Kürzen mit $4\pi r^2$ und Lösen nach g_n ergibt:

(16) $$g_n = -G\rho(4/3)\pi r$$

Die Massedichte ρ kann noch durch die Masse M ausgedrückt werden (Massedichte = Masse / Volumen des Planeten). Dabei ist R der Radius des Planeten:

(17) $$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$$

Und in (16) eingesetzt:

$$g_n = -\frac{GM(4/3)\pi r}{(4/3)\pi R^3} = -\frac{GM(4/3)\pi}{(4/3)\pi R^3}\, r$$

(18) $$\boxed{g_n = -\frac{GM}{R^3}\, r}$$

Das Gravitationsfeld innerhalb des Planeten nimmt somit linear mit r zu!

Interessant ist, dass die Masse ausserhalb der Kugel mit Radius r in (15) nirgends vorkommt und somit keinerlei Beitrag zur Gravitation liefert. Dies bedeutet, dass innerhalb einer Hohlkugel keinerlei Gravitation herrscht!

Vergleich

((10)) $$\boxed{g(r) = -GM\,\frac{1}{r^2}}$$ **Gravitation ausserhalb des Planeten** $(r > R)$

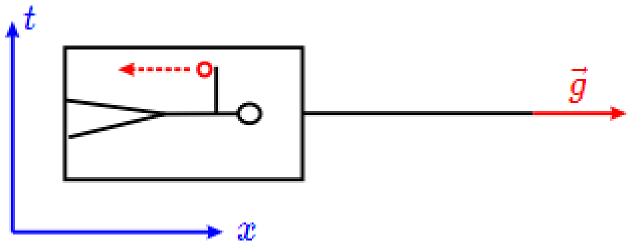
((18)) $$\boxed{g(r) = -\frac{GM}{R^3}\,r}$$ **Gravitation innerhalb des Planeten** $(r < R)$

wobei	$g(r)$	=	Stärke des Gravitationsfeldes als Funktion von r
	r	=	Abstand vom Zentrum des Planeten
	G	=	Gravitationskonstante
	M	=	Masse des Planeten
	R	=	Radius des Planeten

Innerhalb des Planeten nimmt die Gravitation linear zu, ausserhalb nimmt sie mit dem Abstand im Quadrat ab! Wenn $r = R$ ist, werden die beiden Formeln identisch!

Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip sagt: Beschleunigung und Gravitation ist das Selbe. Um dies zu studieren, eignet sich das Modell eines beschleunigten Liftes sehr gut.



Wir sind der aussen stehende Beobachter im blauen Koordinatensystem. Der Lift befindet sich in einem gravitationsfreien Raum und wird horizontal entlang der X-Achse beschleunigt. Die Zeit-Achse zeigt nach oben. Der Lift wird mit der Rate g konstant beschleunigt.

Die Person im Lift hält einen roten Gegenstand. Was passiert, wenn die Person den Gegenstand loslässt? Nehmen wir an, der Lift befand sich zu diesem Zeitpunkt gerade im Stillstand.

Von uns aus betrachtet bleibt der rote Gegenstand an der aktuellen Position stehen, während sich der Lift nach rechts beschleunigt entfernt. Von der Person im Lift aus gesehen muss sich der Gegenstand also beschleunigt nach links (für die Person nach unten) bewegen und zwar genau mit der Beschleunigung g.

Die Person im Lift würde also sagen, im Lift herrscht ein Gravitationsfeld. Jeder Gegenstand, den die Person loslässt, fällt mit der Beschleunigung g zu Boden. Auch die Person selbst wird diese Beschleunigung als ihr Gewicht spüren.

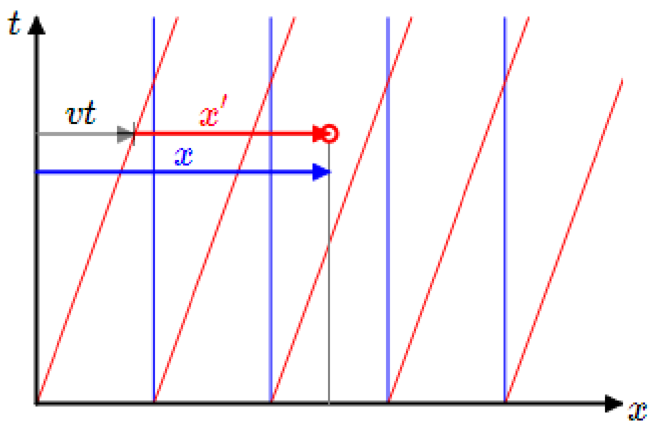
Dies sieht nach Gravitation aus, dies fühlt sich wie Gravitation an, dies IST Gravitation!

Gravitation ist das Selbe wie Beschleunigung!

Alle physikalischen Effekte in einem beschleunigten Lift im gravitationsfreien Raum sind absolut identisch mit den Effekten in einem stillstehenden Lift in einem Gravitationsfeld! Diese Aussage hat Albert Einstein zum ersten Mal gemacht.

Gleichförmig bewegtes Bezugssystem

Bevor wir gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme studieren, betrachten wir zum Vergleich die Situation beim gleichförmig bewegten, unbeschleunigten Bezugssystem.



Die X-Achse zeigt im Bild nach rechts, die Zeit-Achse nach oben. Blau ist das Bezugssystem des ruhenden Beobachters, rot das bewegte System eingezeichnet. Der rote Kreis ist ein beliebiger Punkt in Raum und Zeit, der sich im blauen System nicht bewegt. Im Folgenden wird die Beziehung zwischen den beiden Systemen Blau und Rot untersucht.

Wenn die Geschwindigkeit v zwischen den beiden Systemen viel kleiner als die Lichtgeschwindigeit c ist, laufen die Uhren in beiden Systemen näherungsweise gleich schnell. Es gilt: $t' = t$. Aus der Grafik lässt sich folgende Beziehung ablesen (vergleiche auch mit (5)):

(1) $$\boxed{x' = x - v\,t} \qquad \boxed{t' = t}$$

wobei	x	=	Koordinaten im ruhenden System
	t	=	Zeit im ruhenden System
	x'	=	Koordinaten im bewegten System
	t'	=	Zeit im bewegten System
	v	=	Geschwindigkeit des bewegten Systems gegenüber dem ruhenden System

Dies ist die Koordinatentransformation zwischen den beiden Systemen. Daraus lässt sich die Beziehung von Geschwindigkeit und Beschleunigung zwischen den Systemen ableiten.

Wenn im ruhenden System (blau) ein Gegenstand still steht, ist seine X-Koordinate konstant: $x = \mathrm{const}$. Gesucht ist die Geschwindigkeit $\dot{x}'$ des Gegenstandes im bewegten System (rot). Diese erhält man, indem man x' in (1) nach der Zeit ableitet:

(2) $$\dot{x}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x - v\,t\right] = -v \qquad \Big|\; x = \mathrm{const}$$

Dieses Resultat leuchtet ein. Wenn ein Gegenstand bezüglich des ruhenden Systems still steht, dann sieht ein bewegter Beobachter dieses Objekt mit der Geschwindigkeit $-v$ an ihm vorbei ziehen.

Was lässt sich über die Beschleunigung des Gegenstandes bezüglich des bewegten Systems sagen? Diese erhält man durch nochmaliges Ableiten der Geschwindigkeit $\dot{x}'$ nach der Zeit:

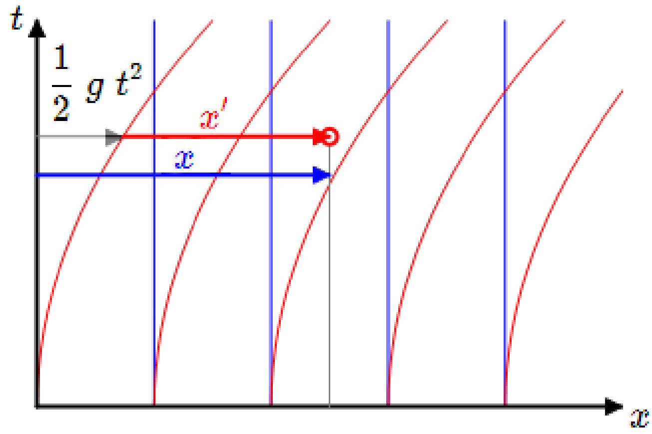
(3) $$\ddot{x}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-v\right] = 0 \qquad \Big|\; v = \mathrm{const}$$

Ein unbeschleunigtes Objekt sieht folglich von beiden Systemen aus unbeschleunigt aus. Es gilt generell:

Unbeschleunigte, also ruhende oder gleichförmig bewegte Objekte, sind in jedem beliebigen gleichförmig bewegten Bezugssystem unbeschleunigt!

Gleichförmig beschleunigtes Koordinatensystem

In diesem Abschnitt wird die Beziehung zwischen einem ruhenden (blau) und einem gleichmässig beschleunigten System (rot) untersucht. Punkte, die im beschleunigten System ruhen, zeichnen im ruhenden System Parabeln (rote Linien).



Die Bewegungsgleichung für einen beschleunigten Punkt ist:

(4) $$x = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

Die Koordinatentransformation vom ruhenden zum beschleunigten System ist wiefolgt (vergleiche auch mit (1)):

(5) $$\boxed{x' = x - \frac{1}{2}\,g\,t^2} \qquad \boxed{t' = t}$$

wobei x = Koordinaten im ruhenden System
t = Zeit im ruhenden System
x' = Koordinaten im bewegten System
t' = Zeit im bewegten System
g = Beschleunigung des bewegten Systems gegenüber dem ruhenden System

Auch hier wird wieder angenommen, dass die Geschwindigkeit v zwischen den Systemen weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit c bleibt, damit $t' = t$ gilt.

Wie sieht der bewegte Beobachter einen im stehenden Bezugssystem ruhenden Gegenstand $x = \mathrm{const}$? Dazu leiten wir die Gleichung (5) zwei mal nach der Zeit ab und erhalten:

(6) $$\dot{x}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x - \frac{1}{2}\,g\,t^2\right] = -g\,t \qquad \Big|\; x = \mathrm{const}$$

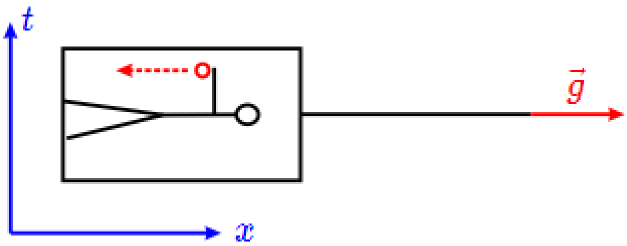
(7) $$\ddot{x}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-g\,t\right] = -g$$

Wenn wir statt eines ruhenden Objektes $x = \mathrm{const}$ ein gleichförmig bewegtes Objekt $x = v\,t$ nehmen, erhalten wir das selbe Resultat:

In einem mit g beschleunigten System erfahren alle ruhenden oder gleichförmig bewegten Objekte die Beschleunigung $-g$.

Dies ist nicht anders in einem Gravitationsfeld zum Beispiel auf der Erde. Ein Labor in einem gleichmässigen Gravitationsfeld g ist nicht zu unterscheiden von einem mit g beschleunigten Labor im gravitationsfreien Raum! Dies ist das Äquivalenzprinzip.

Gravitation oder Beschleunigung?



Eine Person, die sich in einem gleichförmig beschleunigten Lift weit weg von jedem Gravitationsfeld befindet, wird nach dem Äquivalenzprinzip die identischen physikalischen Effekte feststellen, wie sie in einem Gravitationsfeld herrschen. Ein ruhender aussen stehender Betrachter würde jedoch sagen, es gibt hier keine Gravitation. Alle physikalischen Effekte im Lift sind mit der Beschleunigung des Liftes zu erklären.

Beschleunigung und Gravitation sind offenbar das Selbe.

Je nach verwendetem Koordinatensystem kann man die Effekte als Gravitation oder als Beschleunigung auffassen. Physikalisch gesehen ist das das Selbe, abgesehen von Gezeitenkräften natürlicher Gravitationsfelder.

Durch die Wahl von geeigneten beschleunigten Koordinatensystemen kann man somit Gravitation erzeugen oder aufheben. Natürliche Gravitationsfelder können so jedoch nicht vollständig aufgehoben werden, weil diese nicht homogen sind. Die Stärke nimmt mit dem Abstand zur Quelle ab und das Feld zeigt immer zu einem Massenzentrum. Ein solches Gravitationsfeld kann nicht durch ein beschleunigtes Bezugssystem global aufgehoben werden. Es kann nur in einem kleinen räumlichen und zeitlichen Bereich angenähert aufgehoben werden (frei fallender Lift). Es wirken jedoch immer mehr oder weniger stark die Gezeitenkräfte. Diese Gezeitenkräfte können also nicht durch eine Koordinatentransformation zum verschwinden gebracht werden, welche einer flachen Geometrie entsprechen würde.

Dies führt uns zum Konzept von Krümmung und gekrümmter Geometrie. Dazu müssen wir uns zunächst mit dem mathematischen Werkzeug, der Differentialgeometrie gekrümmter Räume und Tensoren beschäftigen.

Beschleunigung und Krümmung

Beim beschleunigten Bezugssystem kann man auch sagen, dass es einem gekrümmten Koordinatensystem folgt. Das beschleunigte System ruht nämlich im gekrümmten roten Koordinatensystem. Ein System, das einer solchen Krümmung folgt, erfährt eine Gravitation: alle

Teile fallen entgegen der Richtung der Beschleunigung wie in einem Gravitationsfeld.

Dies führt uns zu einem Zusammenhang zwischen Krümmung und Gravitation.

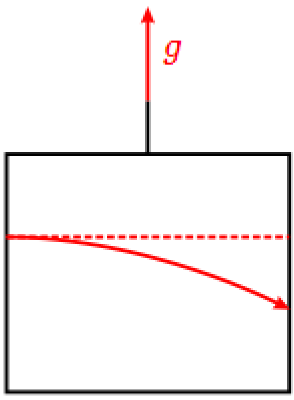
Lichtkrümmung

Einstein erkannte, dass aufgrund des Äquivalenzprinzips auch die Flugbahn von Photonen (Lichtteilchen) in einem Gravitationsfeld gekrümmt sein muss. Vor Einstein ist noch niemand auf die Idee gekommen, dass Raumzeitkrümmung einen Einfluss auf Licht und andere elektromagnetische Wellen haben könnte.

Auf dieser Seite geht es nur um eine qualitative Beschreibung der Lichtkrümmung, nicht um die genaue Berechnung. Es wird erklärt, wie die Lichtkrümmung zustande kommt und eine grobe Abschätzung gegeben, wie stark eine solche Krümmung ausfallen könnte.

Theorie

Das Äquivalenzprinzip besagt: Die Gesetze der Physik in einem Gravitationsfeld sind die selben wie in einem beschleunigten Bezugssystem in einem gravitationsfreien Raum.



Dies gilt nicht nur für Newtonsche Mechanik sondern für jedes physikalische Phänomen!

Um zu verstehen, wie Gravitation Licht krümmen kann, zieht man das Modell eines beschleunigten Bezugssystems heran, zum Beispiel ein Lift, der im gravitationsfreien Raum gleichförmig nach oben beschleunigt wird.

Der Lift soll zunächst in Ruhe sein. Im gleichen Moment, in dem der Lift mit der Beschleunigung g nach oben beschleunigt, wird von links nach recht ein Photon ausgesandt. Dieses Photon fliegt natürlich so gerade wie möglich zur rechten Seite des Liftes. Der Lift bewegt sich in dieser Zeit jedoch beschleunigt nach oben, sodass die Flugbahn des Photons im Bezugssystem des Liftes nach unten gekrümmt erscheint. Die Krümmung ist eine Parabel.

Der Grund, weshalb diese Krümmung in der Praxis niemandem auffällt ist, dass die Bewegung des Liftes bei Beschleunigungen um $1g$ verglichen mit dem Weg, die das Licht in der Zeit zurücklegt, praktisch nicht messbar ist. Um die Lichtkrümmung messen zu können, braucht es grosse Strecken und starke Gravitationsfelder, wie sie bei einer Sonne an der Oberfläche vorkommen.

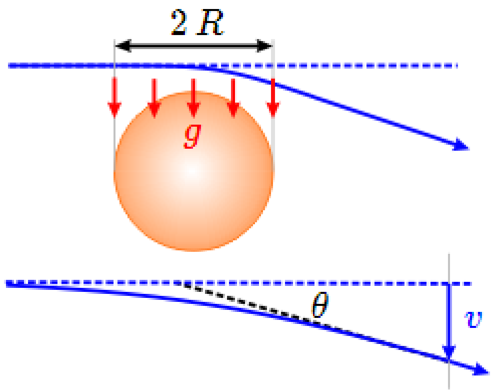
Die Abwärtskomponente des Lichtstrahl entspricht gerade der Beschleunigung g des Liftes. Das Licht fällt also in einem Gravitationsfeld mit einer nach unten gerichteten Beschleunigung g.

Schätzung der Lichtkrümmung nach Newton

Wie stark wird ein Lichtstrahl abgelenkt, der nahe an der Sonne vorbei geht?

Für eine grobe Schätzung können wir Newtons nicht-relativistische Mechanik heranziehen. Zudem vereinfachen wir das Gravitationsfeld g. Es wirke homogen über die Strecke $2\,R$ und sei ausserhalb dieses Bereiches ohne Einfluss. R ist der Radius der Sonne.

Die über den Bereich $2\,R$ wirkende Gravitation g berechnen wir nach der Newton Formel:



(1) $$g = \frac{M\,G}{R^2}$$

wobei M = Masse der Sonne
G = Gravitationskonstante
R = Radius der Sonne

Alles in diesem Bereich wird nach unten Beschleunigt, Licht ebenso wie alles Andere, und alles mit der selben Beschleunigung g.

Nachdem der Lichtstrahl die Sonne passiert hat, hat er eine vertikale Geschwindigkeits-Komponente v durch die Beschleunigung erhalten. Die Geschwindigkeit berechnet man aus der Beschleunigung g und der Zeit Δt, in der die Beschleunigung gewirkt hat:

(2) $$v = g \cdot \Delta t$$

Die Zeit Δt ist abhängig von der Geschwindigkeit, in der das Licht die Strecke $2\,R$ passiert. Licht hat im Vakuum immer Lichtgeschwingigkeit c:

(3) $$\Delta t = \frac{2\,R}{c}$$

(1) und (3) in (2) eingesetzt ergibt:

(4) $$v = \frac{M\,G}{R^2} \cdot \frac{2\,R}{c} = \frac{2\,M\,G}{R\,c}$$

Die Ablenkung soll als Winkel θ ausgedrückt werden. Bei kleinen Winkeln ist θ das Verhältnis der vertikalen Geschwindigkeit v zur horizontalen Geschwindigkeit c:

(5) $$\boxed{\theta = \frac{v}{c} = \frac{2\,M\,G}{R\,c^2} = 4.2 \cdot 10^{-6}\,\text{rad} = 0.88''}$$

Nicht-relativistische Schätzung

wobei θ = Ablenkwinkel des Lichtstrahls (in Radian)
M = Masse der Sonne $1.989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$

G = Gravitationskonstante $6.673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg/s^2}$
R = Radius der Sonne $6.957 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$
c = Lichtgeschwindigkeit $2.998 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$

Dies ist typischerweise ein sehr kleiner Winkel (0.88 Bogensekunden) weil c im Nenner eine sehr grosse Zahl ist und erst noch im Quadrat steht und G im Zähler eine sehr kleine Zahl ist.

Zufälligerweise stimmt dieser Schätzwert exakt mit dem Wert überein, den man durch Berechnung der ganzen Flugbahn eines Photons im realen Schwerefeld der Sonne erhält, wobei wir aber ignorieren müssen, dass das Photon keine Masse und immer die Geschwindigkeit c hat.

Dies war die erste Schätzung, die Einstein machte. Die relativistische Berechnung nach der ART, in der die Ablenkung eine Folge der Raumzeitkrümmung ist, ergibt einen doppelt so grossen Ablenkwinkel θ.

(6) $$\boxed{\theta = \frac{4\,M\,G}{R\,c^2} = 1.75''}$$ **Relativistische Berechnung**

Diese relativistische Berechnung wurde bis auf Bruchteile von Prozenten Genauigkeit durch Messungen vielfach bestätigt[1][2].

Spektralverschiebung von Licht aufgrund Gravitation

Was passiert, wenn das Licht in einem Gravitationsfeld nach oben oder unten geschickt wird? Vom Gedankenexperiment mit einem beschleunigten Lift könnte man annehmen, dass der Lichtstrahl beschleunigt bzw. abgebremst würde. Licht bewegt sich jedoch in jedem Bezugssystem immer mit der Lichtgeschwindigkeit c. Also muss etwas anderes passieren.

Was wirklich passiert ist, dass sich die Wellenlänge des Lichtes verändert. Bei einem Lichtstrahl, der in Beschleunigungsrichtung (im Lift von unten nach oben) gesandt wird, der sich also entgegen dem Gravitationsfeld ausbreitet, wird die Wellenlänge grösser, weil sich der Detektor schneller vom Lichtstrahl wegbewegt, als der Sender vorher den Lichtimpuls mit einer bestimmten Wellenlänge ausgesandt hat. Mit Hilfe des Dopplereffektes kann dieser Effekt berechnet werden. Umgekehrt wird die Wellenlänge eines Lichtstrahls kürzer, wenn er sich in Richtung des Gravitationsfeldes oder entgegen der Beschleunigungsrichtung des Liftes bewegt.

Eine Verlängerung der Wellenlänge bedeutet Verlust von Energie. Die Energie eines Lichtquants ist proportional zur Frequenz des Lichtes also umgekehrt proportional zur Wellenlänge. Licht, das sich von einer Masse weg bewegt wird also nicht langsamer, sondern verliert Energie. Licht, das sich auf eine Masse hin bewegt, gewinnt Energie.

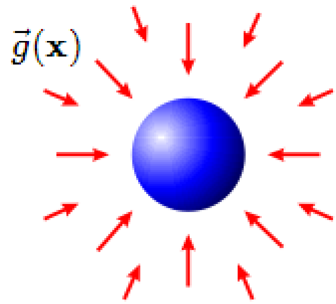
Quellen

1. Tests of Post-Newtonian Gravity; *Living Reviews*
   The Shapiro time-delay measurements using Viking spacecraft yielded an agreement with GR to 0.1 percent, and VLBI light deflection measurements have reached 0.02 percent.
   relativity.livingreviews.org/open?pubNo=lrr-2001-4&page=node10.html
2. Light Deflection at the sun
   backreaction.blogspot.com/2008/01/light-deflection-at-sun.html

Gezeitenkräfte

Das Äquivalenzprinzip besagt: Die Gesetze der Physik in einem Gravitationsfeld sind die selben wie in einem beschleunigten Bezugssystem in einem gravitationsfreien Raum. Dies gilt jedoch nur für homogene Gravitationsfelder. Das sind Gravitationsfelder, die überall in die selbe Richtung zeigen und überall gleich stark sind.

Dies ist bei natürlichen Gravitationsfeldern nur näherungsweise in einem kleinen Ausschnitt der Fall. Das Gravitationsfeld eines Planeten zeigt einerseit von jeder Stelle im Raum immer zum Zentrum des Planeten und andererseits nimmt seine Stärke mit dem Abstand im Quadrat ab $(1/r^2)$.



In einem Labor, das im Vergleich zu einem Planeten winzig ist und über einen kurzen Zeitabschnitt betrachtet, kann man jedoch das Gravitationsfeld eines Planeten als homogen betrachten.

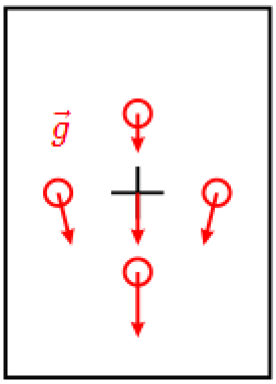
Freier Fall

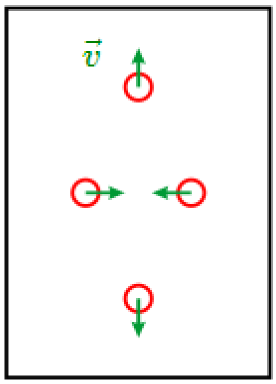
In einem unbeschleunigten Lift fern aller Massen herrscht Schwerelosigkeit. Das selbe gilt auch für einen frei fallenden Lift in einem Gravitationsfeld. Denn alles, der Lift und der Inhalt, wird exakt gleich stark in die selbe Richtung beschleunigt, sodass unter den Objekten im Lift und dem Lift selbst keine realtive Beschleunigung feststellbar ist. Dies ist die Situation, in der sich Astronautem befinden, wenn sie in einem Raumschiff um die Erde kreisen.

Wenn ein Lift in einem homogenen Gravitationsfeld frei fällt, herrscht im Inneren perfekte Schwerelosigkeit. Wie sieht es aber aus, wenn der Lift in einem natürlichen, nicht homogenen Gravitationsfeld frei fällt? Wie wirkt sich das inhomogene Gravitationsfeld eines Planeten aus? Kann eine Person im Lift herausfinden, ob sie sich in der Nähe eines planetaren Gravitationsfeldes befindet oder im gravitationsfreien Raum?

Die Antwort ist: JA. Über einen genügen langen Zeitabschnitt betrachtet, kann man die inhomogenität des natürlichen Gravitationsfeldes messen.

Verteilt man vier beliebige Objekte wie im Bild links gezeigt, so erfahren diese Objekte im natürlichen inhomogenen Gravitationsfeld jedes eine etwas andere Beschleunigung. Die Beschleunigung ist näher am Planeten etwas grösser, als weiter weg und die Beschleungigungsvektoren zeigen auf einen gemeinsamen Punkt. Die





Beschleunigung des Liftes selbst entspricht dem Mittelwert und greift im Zentrum des Liftes an.

Diese Konstellation bewirkt, dass vom Lift aus gesehen die Objekte sich beginnen in unterschiedliche Richtungen zu beschleunigen. Die Objekte links und rechts streben zur Mitte hin wogegen die Objekte oben und unten von der Mitte weg streben (Bild rechts).

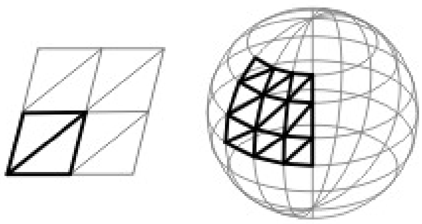
Würde man statt einzelner Objekte eine kugelförmige Gaswolke oder eine Wasserkugel nehmen, so könnte man mit der Zeit eine entsprechende Deformierung beobachten. Die Kugel würde horizontal gequetscht und vertikal gedehnt werden. Das ist genau das, was das Gravitationsfeld des Mondes mit dem Meer auf der Erde macht, was zu Flut und Ebbe führt. Die entsprechenden Kräfte nennt man Gezeitenkräfte (*engl.* Tidal Forces).

Euklidische Geometrie

Unter **euklidischer Geometrie** versteht man die aus den Axiomen und Postulaten Euklids abgeleitete Geometrie. In jeder Geometrie interessiert man sich für diejenigen Transformationen, die bestimmte Eigenschaften nicht zerstören: Zum Beispiel ändern weder eine Parallelverschiebung noch eine Drehung oder Spiegelung in einer zweidimensionalen euklidischen Geometrie die Abstände von Punkten. Man sagt, dass der Abstand zweier Punkte eine euklidische Invariante darstellt.

Wie kann man die Geometrie beschreiben?

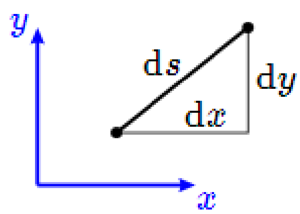
Eine Kugeloberfläche ist ein zweidimensionales Gebilde und die Kugeloberfläche ist offensichtlich gekrümmt, was in der dritten Dimension einfach ersichtlich ist. Es braucht jedoch keine dritte Dimension, um die Krümmung einer zweidimensionalen Fläche zu beschreiben. Dazu reichen Eigenschaften der Ebene aus.



Wie man im Bild erkennen kann, lässt sich jede Fläche durch lauter kleine Dreiecke aufbauen. Im Bild handelt es sich um lauter gleichartige Dreiecke. Die Dreiecke, welche eine Kugelfläche abdecken, müssen sich aber von den Dreiecken in der flachen Ebene leicht unterscheiden. Diese Unterscheidung ist ausreichend um die Geometrie der Fläche bestimmen zu können ohne dass eine höhere Dimension herangezogen werden muss.

Mathematiker beschreiben die Geometrie einer Fläche (oder eines N-Dimensionalen Raumes), indem sie die Distanz zwischen beliebigen benachbarten Punkten spezifizieren. Wenn man den Abstand zwischen jedem Paar benachbarter Punkte kennt, kann man die ganze Geometrie rekonstruieren und feststellen, ob sie flach oder gekrümmt ist.

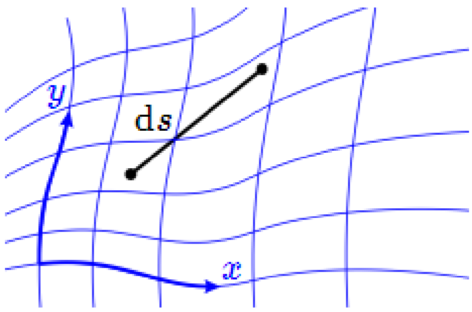
Der infinitesimale Abstand $\mathrm{d}s$ zwischen zwei benachbarten Punkten kann im kartesischen Koordinatensystem mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:



(1) $$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

Im kartesischen Koordinatensystem sind die Koordinatenlinien gerade und stehen senkrecht aufeinander.

Man kann sich jedoch beliebige andere Koordinatensysteme vorstellen, z.B. Polarkoordinaten usw. In jedem Koordinatensystem erhält man andere Werte für die Komponenten von $\mathrm{d}s$ und die Komponenten können nur im kartesischen Koordinatensystem nach der Formel (1) zu $\mathrm{d}s$ kombiniert werden. Was jedoch in jedem beliebig gewählten



Koordinatensystem gleich bleibt, ist der Wert von $\mathrm{d}s$. Man sagt: $\mathrm{d}s$ ist eine Invariante. Dies leuchtet ein, denn ein Massstab einer bestimmten Länge bleibt immer der selbe Massstab, egal in welches Koordinatensystem man ihn legt.

Die Formel für den infinitesimalen Abstand zwischen zwei Punkten in einem beliebig gekrümmten Koordinatensystem wie im Bild rechts sieht wiefolgt aus:

(2) $$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,g_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + g_{22}\,\mathrm{d}y^2$$

In der Formel (2) kommen die Komponenten $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ auch wieder vor und sie stehen im Quadrat. Man nennt das die quadratische Form. Die g-Werte sind keine Konstanten, sondern hängen generell von der Position ab: $g_{ij} = f(x, y)$. Die g's sind also Felder.

Beachte, dass die Formel (1) ein Spezialfall von Formel (2) ist mit den Werten $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ und $g_{22} = 1$.

Der Therm $g_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kommt in (1) nicht vor. Dieser Therm ist immer dann ungleich Null, wenn die Koordinaten nicht senkrecht aufeinander stehen. Die Werte g_{11} und g_{22} haben mit dem Gitter-Abstand des Koordinatensystems, also der Skalierung in die entsprechende Richtung zu tun. Wenn das Koordinatengitter gekrümmt ist und sich von Ort zu Ort ändert, so sind die g's Funktionen der Position (Felder).

Die Funktionen $g_{ij}(\mathbf{x})$ nennt man die Metrik.

Flache Geometrie

Wenn man die Geometrie einer Fläche durch die einfache Formel (1) beschreiben kann, dann nennt man diese Geometrie **flach**. Durch die Wahl eines entsprechenden Koordinatensystems kann man selbst eine flache Geometrie durch eine komplizierte Formel wie (2) ausdrücken. Wenn es jedoch möglich ist ein neues Koordinatensystem für diese Geometrie zu finden, welches durch die Formel (1) beschrieben werden kann, dann ist die Geometrie flach.

Gekrümmte Geometrie

Es gibt Geometrien, die nicht flach sind. Egal wie man auch ein Koordinatensystem wählt in einer solchen Geometrie, wird es nicht möglich sein, sie auf die Form von (1) zu reduzieren.

Die zweidimensionale Oberfläche einer Kugel zum Beispiel hat so eine gekrümmte Geometrie. Egal wie man ein Koordinatensystem auf der Oberfläche einer Kugel wählt, man kann den Abstand benachbarter Punkte nie durch die Formel (1) ausdrücken.

Gekrümmt oder Flach?

Sehr oft können gekrümmte Geometrien lokal durch eine flache Geometrie angenähert werden. Die Geometrie eines Konus z.B. ist sogar überall flach, ausser an der Spitze.

Ebene
: Eine Ebene wie eine Wandtafel hat offensichtlich eine flache Geometrie.

Kugeloberfläche
: Eine Kugeloberfläche hat eine gekrümmte Geometrie. Die Kugeloberfläche kann nicht flach gemacht werden, ohne die Oberfläche zu verzerren.

Zylinderfläche
: Eine Zylinderfläche hat eine flache Geometrie. Der Zylinder kann aufgeschnitten und zu einer Ebene entrollt werden, ohne die Fläche verzerren zu müssen.

Sattelfläche
: Eine Sattelfläche hat eine gekrümmte Geometrie. Wie die Kugeloberfläche kann eine Sattelfläche nicht flach gemacht werden, ohne die Fläche zu verzerren.

Konus
: Ein Konus ist überall flach, ausser an der Spitze! Der Konus kann aufgeschnitten und ohne Verzerrung zu einer Ebene entrollt werden. An der Spitze ist die Geometrie jedoch gekrümmt.

Weitere Informationen

- **Euklidische Geometrie**; *Wikipedia (de)*
- **Geometry**; *Wikipedia (en)*