AR: Rechnen mit Tensoren

In der Tensor-Algebra geht es um Tensoren mit hochgestellten und tiefgestellten Indizes, deren Transformationseigenschaften und den Metrik-Tensor, mit dessen Hilfe die Indizes manipuliert werden können.

Tensor-Arithmetik

Weil Skalare und Vektoren Subklassen von Tensoren sind ist zu erwarten, dass Tensoren den selben bekannten Rechenregeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division folgen. Dies stimmt meistens, jedoch mit einigen Änderungen und Einschränkungen. Tensoren zeigen zudem neue Eigenschaften, die es bei Skalaren und Vektoren nicht gibt.

Null-Tensor

Wenn bei einem beliebigen Tensor Z alle Komponenten Null sind, spricht man vom Null-Tensor:

(1) $$Z^{m\dots}_{n\dots} = \mathbf{0} \qquad \textbf{Null-Tensor}$$

Die Komponenten des Null-Tensors sind in allen Koordinatensystemen Null. Dies folgt aus der Art wie Tensoren transformiert werden:

(2) $$Z^{m\dots}_{n\dots}(\mathbf{y}) = \frac{\partial y^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} \dots Z^{r\dots}_{s\dots}(\mathbf{x})$$

Wenn also hier alle Komponenten des Tensors $Z^{r\dots}_{s\dots}(\mathbf{x})$ Null sind, können sie auch in allen anderen Koordinatensystemen nur Null sein, da Null mal etwas immer Null ergibt.

Gleichheit von Tensoren

Wenn zwei Tensoren in einem bestimmten Koordinatensystem gleich sind, d.h. vom selben Typ sind und identische Komponenten haben, so sind sie in allen Koordinatensystem gleich. Wenn also gilt dass:

(3) $$A_{mn}(\mathbf{x}) = B_{mn}(\mathbf{x})$$

dann kann man auch schreiben:

(4) $$A_{mn}(\mathbf{x}) - B_{mn}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A_{11} - B_{11} & A_{12} - B_{12} & A_{13} - B_{13} \\ A_{21} - B_{21} & A_{22} - B_{22} & A_{23} - B_{23} \\ A_{31} - B_{31} & A_{32} - B_{32} & A_{33} - B_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Rechts steht $\mathbf{0}$ für den Null-Tensor. Da der Null-Tensor in allen Koordinatensystemen Null ist gilt auch, dass die linke Seite der Gleichung in allen Koordinatensystemen Null ist. Das heisst aber nichts anderes als dass zwei gleiche Tensoren in allen Koordinatensystemen gleich sein müssen!

Beachte: Die Komponenten von A_{mn} und B_{mn} können in verschiedenen Koordinatensystem unterschiedlich sein. Aber in einem bestimmten Koordinatensystem sind die Komponenten der beiden Tensoren jeweils identisch.

Wenn in einer Tensor-Gleichung für ein bestimmtes Koordinatensystem bewiesen ist, dass die linke Seite des Gleichheitszeichens gleich der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist, dann gilt diese Gleichheit für alle Koordinatensysteme!

Dies ist eine der wichtigsten Eigenschaften von Tensoren und Tensor-Gleichungen! Die Gleichheit von Tensoren ist eine geometrische Eigenschaft, die nicht von einem Koordinatensystem abhängig ist! Die Komponenten von Tensoren jedoch sind abhängig vom gewählten Koordinatensystem.

Addition und Subtraktion

Zwei Tensoren können nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie vom selben Typ sind. Der Tensor-Typ bestimmt Rang, Dimension und Komponenten-Art eines Tensors.

Wenn zum Beispiel A_r^{mn} und B_r^{mn} beides Tensoren sind, dann ist auch die Summe der beiden ein Tensor:

$$C_r^{mn} = A_r^{mn} + B_r^{mn} = B_r^{mn} + A_r^{mn} \tag{5}$$

Die Reihenfolge der Addition spielt keine Rolle (Kommutativgesetz).

Die Subtraktion folgt den selben Regeln wie die Addition. Die entsprechenden Tensoren müssen also auch bei der Subtraktion vom selben Typ sein:

$$D_r^{mn} = A_r^{mn} - B_r^{mn} \tag{6}$$

Multiplikation

Um zwei Tensoren miteinander zu multiplizieren, werden sie einfach zu einem neuen Tensor zusammengefügt, indem alle unabhängigen Indizes in ihrer entsprechenden Position kombiniert werden:

$$T_{de}^{abc}\, R_{hjkl}^{fg} = P_{dehjkl}^{abcfg} \tag{7}$$

Achtung: Die Reihenfolge der Multiplikation von Tensoren spielt eine Rolle. Bei der Tensor-Multiplikation gilt das Kommutativgesetzt generell nicht. Ausnahme: Multiplikation mit einem Skalar!

Division

Die Division eines Tensors durch einen anderen ist nicht generell möglich. Die einzige Ausnahme ist die Division eines Tensors durch einen Skalar. In diesem Fall wird der Tensor einfach neu skaliert, indem jede Komponente des Original-Tensors durch den Skalar dividiert wird.

Assoziativgesetz

Die Addition und Multiplikation von Tensoren sind assoziativ:

(8) $$A^r_{mn} + (B^r_{mn} + C^r_{mn}) = (A^r_{mn} + B^r_{mn}) + C^r_{mn}$$

(9) $$T^m\ (R^n\ S_r) = (T^m\ R^n)\ S_r = P^{mn}_r$$

(10) $$a \cdot (b \cdot T^m) = (a \cdot b) \cdot T^m$$

Kommutativgesetz

Tensoren kommutieren generell nicht. Ausnahme: Multiplikation mit einem Skalar.

(11) $$C^{mn} = A^m\ B^n \neq B^n\ A^m = C^{nm}$$

Das Kommutativgesetz gilt jedoch für die Addition:

(12) $$A^m + B^m = B^m + A^m$$

Tensor-Kontraktion

Tensor-Kontraktion oder **Tensorverjüngung** bedeutet, einem kontravarianten und einem kovarianten Index eines Tensors den selben Namen zu geben und über diesen Index zu summieren (Einsteinsche Summenkonvention). Dieses Zusammenführen von Indizes ist eine Operation auf Tensoren, die wiederum einen Tensor aber mit niedrigerem Rang erzeugt.

Beispiel mit einem einfachen dreidimensionalen Tensor vom Rang 2:

(1) $$T_m^m = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 = S$$

Diesen Tensor T_m^m kann man als Matrix betrachten und die Tensor-Kontraktion entspricht dem Berechnen der Spur der Matrix. Aus diesem Grund wird die Abbildung auch Spurbildung genannt.

Das Resultat dieser Operation ist hier ein Skalar S. Um nachzuweisen, dass S ein Skalar ist, wenden wir die Regel für die Transformation eines Tensors mit gemischten Indizes an:

(2) $$\boxed{T_n^m(\mathbf{y}) = \frac{\partial y^m}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^s}{\partial y^n}\,T_s^r(\mathbf{x})}$$

Transformation Tensor mit gemischten Indizes

Nun setzen wir $n = m$ und schauen was dabei herauskommt:

(3) $$T_m^m(\mathbf{y}) = \frac{\partial y^m}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^s}{\partial y^m}\,T_s^r(\mathbf{x}) = \frac{\partial x^s}{\partial x^r}\,T_s^r(\mathbf{x}) = \delta_r^s\,T_s^r(\mathbf{x}) = T_r^r(\mathbf{x})$$

Die Terme ∂y^m kürzen sich weg. Der verbleibende Teil $\partial x^s / \partial x^r$ ergibt das Kronecker-Delta δ_r^s, denn $\partial x^s / \partial x^r$ ist 1, wenn $r = s$ ist und Null in allen anderen Fällen, weil die verschiedenen x voneinander unabhängige Basisvektoren sind.

Das Kronecker-Delta auf einen Tensor angewandt bedeutet einfach, dass man die Indizes des Tensors zusammenführen soll wie in (3) ganz rechts gezeigt. Man pickt mit dem Kronecker-Delta quasi nur jene Tensor-Elemente heraus, welche die selben Indizes haben und summiert diese.

Wir erhalten also:

(4) $$T_m^m(\mathbf{y}) = T_r^r(\mathbf{x}) \qquad \Rightarrow \qquad T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 = S$$

Links steht ein Tensor im Y-Koordinatensystem und rechts einer im X-Koordinatensystem. Diese spezielle Kombination hängt also nicht davon ab, welches Koordinatensystem wir benutzen! Was resultiert ist in diesem Fall ein Skalar, also ein Tensor ohne Indizes.

Kontraktion von Tensoren mit mehreren Indizes

Für kompliziertere Tensoren mit vielen Indizes funktioniert die Tensor-Kontraktion entsprechend:

(5) $$T^{mnop}_{rsm} = T^{nop}_{rs}$$

Die zusammengeführten Indizes (hier m) verschwinden beim Summieren. Das Resultat ist in jedem Falle wieder ein Tensor, was wie in (3) gezeigt bewiesen werden kann.

Ein Anwendungsbeispiel in der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Kontraktion des riemannschen Krümmungstensors zum Ricci-Tensor:

(6) $$R^{l}_{ijk} \quad \Rightarrow \quad R^{j}_{ijk} = R_{ik}$$

wobei R^{l}_{ijk} = Riemannscher Krümmungstensor
R_{ik} = Ricci-Tensor

Skalarprodukt als Tensor-Kontraktion

Ein einfacher Tensor von Rang 2 kann aus zwei Vektoren gebildet werden:

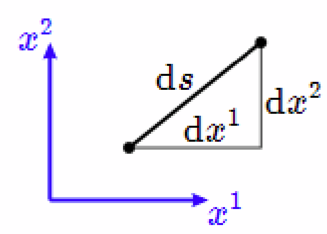
(7) $$T^{m}_{n} = V^{m}\, W_{n}$$

Wenn wir hier die Indizes zusammenführen erhalten wir das Skalarprodukt der beiden Vektoren:

(8) $$T^{m}_{m} = V^{m}\, W_{m} = V^{1}\, W_{1} + V^{2}\, W_{2} + V^{3}\, W_{3}$$

Index-Kontraktion mit dem Metrik-Tensor

Der Metrik-Tensor hat eine geometrische Bedeutung: Er stellt eine Beziehung zum Abstand benachbarter Punkte her. Damit sind hier infinitesimal kleine Abstände zwischen Punkten gemeint, sog. differenzielle Abstände $\mathrm{d}s$:



(9) $$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^{m}\, \mathrm{d}x^{n}\, g_{mn}(\mathbf{x}) = \mathrm{d}x^{m}\, \mathrm{d}x_{m}$$

wobei $\mathrm{d}s$ = infinitesimaler Abstand zweier benachbarter Punkte
$\mathrm{d}x^{m}, \mathrm{d}x^{n}$ = kontravariante Differentiale

$g_{mn}(\mathbf{x})$ = Metrik-Tensor im X-Koordinatensystem

Dies ist ein Spezialfall der Regel der Index-Kontraktion. Die Indizes m und n werden zusammengezogen. Es bleiben keine Indizes übrig! Das Resultat ist also ein Skalar.

Index-Manipulation per Metrik-Tensor

Durch Multiplizieren mit dem Metrik-Tensor können Tensor-Indizes hoch- und tiefgestellt werden, also kontravariante Komponenten eines Tensors in kovariante Komponenten umgewandelt werden und umgekehrt (siehe Kovariante und Kontravariante Komponenten).

(1) $$V_n = V^m \, g_{mn}$$ **Index tiefstellen**

(2) $$V^n = V_m \, g^{mn}$$ **Index hochstellen**

Bei V^m und V_m handelt es sich um den selben (physikalischen) Vektor $\vec{V}$, jedoch einmal mit kontravarianten Komponenten und einmal mit kovarianten Komponenten ausgedrückt. Zwischen den beiden Komponenten-Darstellungen kann also mittels des Metrik-Tensors und seiner Inversen umgerechnet werden.

Jeder Tensor hat somit mehrere Identitäten. Sie unterscheiden sich nur durch den Gebrauch von kontravarianten oder kovarianten Komponenten bzw. zwischen hochgestellten und tiefgestellten Indizes. Zwischen diesen Darstellungen kann mit Hilfe des Metrik-Tensors gewechselt werden. Dies gilt auch für Tensoren vom Rang grösser als 1:

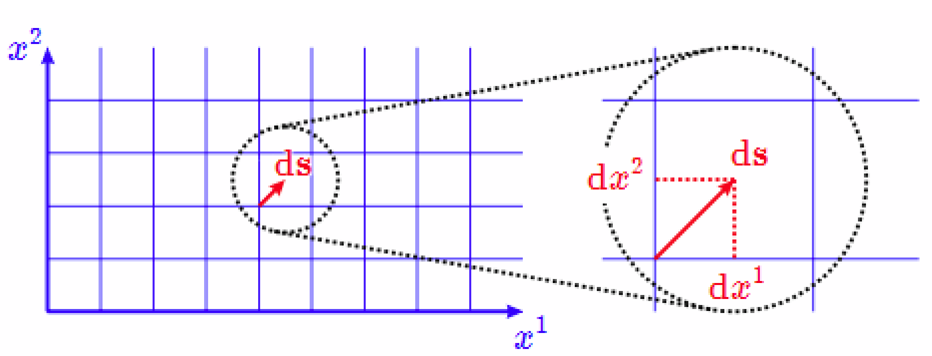
Wenn wir zum Beispiel den ersten Index des Tensors T_{mn} hochstellen wollen, so geht das wiefolgt:

(3) $$T^m{}_n = g^{mr} \, T_{rn}$$

Auch hier gilt: Die Komponenten von $T^m{}_n$ und T_{mn} sind nicht die selben! Die beiden Tensoren repräsentieren jedoch das selbe Objekt!

Anwendung: Länge eines Vektors berechnen

Gehen wir von einem kleinen Vektor $\mathrm{d}\vec{s}$ aus, der in Tensor-Schreibweise als $\mathrm{d}x^m$ mit kontravarianten Komponenten geschrieben werden kann:



(4) $$\mathrm{d}x^m = \mathrm{d}x^1 \cdot \vec{e}_1 + \mathrm{d}x^2 \cdot \vec{e}_2$$

wobei $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ = Einheitsvektoren (Vektoren der Länge 1) in Richtung x_1 bzw. x_2

Wir können den selben Vektor jedoch auch mit Hilfe des Metrik-Tensors mit kovarianten Komponenten beschreiben:

(5) $$\mathrm{d}x_m = g_{mn}\,\mathrm{d}x^n$$

Wie z.B. hier gezeigt können wir daraus einen neuen Tensor durch Multiplizieren bilden:

(6) $$T^m{}_n = \mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x_n$$

Was passiert nun, wenn wir diesen Tensor kontrahieren?

(7) $$T^m{}_m = \mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x_m = S$$

Durch die Tensor-Kontraktion erhalten wir einen Skalar S, der transformations-invariant ist. Wir können den kovarianten Vektor noch durch (5) ausdrücken und erhalten damit:

(8) $$S = \mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n\,g_{mn}$$

Dieser Skalar S ist nichts anderes als das Quadrat $\mathrm{d}s^2$ der Länge des Vektors $\mathrm{d}\vec{s}$:

(9) $$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n\,g_{mn} = \mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x_m = \mathrm{d}x_m\,\mathrm{d}x_n\,g^{mn}}$$ **Distanz-Formel**

Dies ist das Grundprinzip des Metrik-Tensors! Beachte, dass g^{mn} die Inverse des Metrik-Tensors g_{mn} ist!

Weitere Informationen

- **Metrik-Tensor**
- **Inverse des Metrik-Tensors**
- **Kovariante und Kontravariante Komponenten**

Raumzeit-Tensoren

Tensoren können nicht nur aus räumlichen Komponenten bestehen, sondern auch eine zeitliche Komponente haben. Hier zeige ich, dass sich bei der Tensorrechnung nichts grundlegend ändert, wenn man den Übergang von Raum zu Raumzeit vollzieht.

Voraussetzungen und Konventionen

Die Spezielle Relativitätstheorie von Einstein führt die Idee der Raumzeit ein. Um die folgende Beschreibung zu verstehen, wird ein grundlegendes Verständnis von Lorenz-Transformationen vorausgesetzt.

In der Physik wird oft in Einheiten gerechnet, in denen die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt wird. Die Konstante c dient als Umrechnungsfaktor zwischen Raum und Zeit:

(1) $$x = c\,t$$

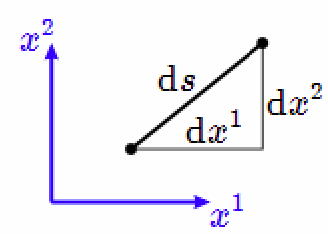
wobei x = räumliche Koordinate mit Längen-Einheiten

t = zeitliche Koordinate mit Zeit-Einheiten

c = Lichtgeschwindigkeit: ca. $300'000\ \mathrm{km/s}$

Man kann die Einheiten von Raumzeit-Koordinatensystemen immer so wählen, dass $c = 1$ ist, wodurch Diagramme und Formeln einfacher werden. Dies nicht so zu machen wäre gleich unpraktisch, wie für jede Raumkoordinate eine andere Einheit (Meter, Fuss, Inches) zu verwenden, wodurch in allen Formeln entsprechende Umrechnungsfaktoren eingeführt werden müssten, analog zu $c \neq 1$!

Übergang von Raum zu Raumzeit



Wir beschränken uns zunächst auf rechtwinklige kartesische Koordinatensysteme im flachen Raum. Diese Koordinatensysteme können gegeneinander verschoben oder rotiert sein. Sie haben alle die Eigenschaft, dass bei der Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes das Längenelement $\mathrm{d}s^2$ den selben Wert beibehält (Invarianz):

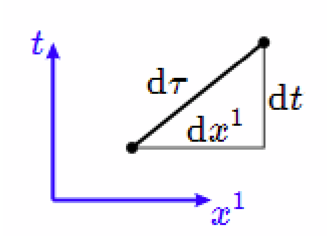
(2) $$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$$

Der Metrik-Tensor g_{mn} in solchen kartesischen Koordinatensystemen ist immer gleich dem Kronecker-Delta δ_{mn}. Damit kann diese Metrik auch folgendermassen geschrieben werden:

(3) $$\mathrm{d}s^2 = g_{mn}\,\mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n = \delta_{mn}\,\mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n$$

Für mehrdimensionale Räume werden einfach entsprechend mehr Therme für jede zusätzliche Dimension angehängt.

Beim Übergang von Raum zu Raumzeit wird neben den drei Raumkoordinaten eine vierte Zeit-Koordinate eingeführt. Raumzeit hat also 4 Koordinaten - sie bilden zusammen einen 4-dimensionalen Raum. Ein Raumzeit-Vektor hat also 4 Komponenten: eine davon entspricht der Zeit, die anderen 3 sind Raumkoordinaten.



In der Speziellen Relativitätstheorie gibt es eine zu $\mathrm{d}s$ analoge invariante Grösse: die Eigenzeit $\mathrm{d}\tau$:

(4) $$\boxed{\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \left[(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2\right]} \qquad \Big|\; c = 1$$

Im Gegensatz zu (2) bleibt bei der Lorenz-Transformation der Speziellen Relativitätstheorie nicht die Summe der Quadrate invariant, sondern die Quadrate der Raum-Koordinaten müssen vom Quadrat der Zeit-Koordinate subtrahiert werden! Diese Invariante $\mathrm{d}\tau$ nennt man **Eigenzeit** (engl: proper time).

Wenn man mit Einheiten rechnen will, in denen die Lichtgeschwindigkeit $c \neq 1$ ist, so sieht (4) wiefolgt aus:

(5) $$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2}{c^2}$$

Raumzeit-Transformationen (Lorenz-Transformationen) sind gekennzeichnet dadurch, dass sie die obige Metrik bewahren! Diese Metrik stellt die Eigenzeit $\mathrm{d}\tau$ dar, im Gegensatz zum räumlichen Abstand $\mathrm{d}s$ bei reinen räumlichen Transformationen. Lorenz-Transformationen sind also jene Transformationen von einem Koordinatensystem zu einem anderen, in welchen $\mathrm{d}\tau^2$ in allen Koordinatensystemen den selben Wert hat!

Notation von Raumzeit-Tensoren

Indizes von rein räumlichen Tensoren werden mit lateinischen Buchstaben geschrieben. Für Indizes von Raumzeit-Tensoren werden grichische Buchstaben verwendet:

(6) **Raum-Koordinatensysteme** **Raumzeit-Koordinatensysteme**

$$x^m = (x^1, x^2, x^3) \qquad x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad \Big|\; x^0 = t$$

Die erste Komponente bei Raumzeit-Vektoren ist immer die Zeit-Komponente: $x^0 = t$. Weitere räumliche Komponenten werden bei Bedarf einfach hinten angefügt (z.B: in der String-Theorie).

Mit dieser Notation kann die Tensor-Schreibweise der Metrik praktisch beibehalten werden:

	Raum-Koordinatensysteme (Euklid-Koordinaten)	**Raumzeit-Koordinatensysteme** (Minkowski-Koordinaten)
(7)	$\mathrm{d}s^2 = g_{mn}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n$	$\mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$

Der Term $(\mathbf{x})$ von $g_{mn}(\mathbf{x})$ bzw. $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ weist darauf hin, dass die Komponenten des Metrik-Tensors bei gekrümmten Koordinatensystemen oder gekrümmten Räumen Funktionen der Position bzw. der Raumzeit-Position sind.

Wie sieht ein solcher Metrik-Tensor aus? Vergleichen wir der Einfachheit halber den Metrik-Tensor in ungekrümmten Koordinaten/Räumen. In (3) haben wir gesehen, dass in diesem Fall der Metrik-Tensor gleich dem Kronecker-Delta entspricht. In Minkowski-Koordinaten existiert ein analoger Metrik-Tensor:

	Raum-Koordinatensysteme (Euklid-Koordinaten)	**Raumzeit-Koordinatensysteme** (Minkowski-Koordinaten)	
(8)	$\delta_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	**Metrik-Tensor im flachem Raum**

Das dem Kronecker-Delta entsprechende $\eta_{\mu\nu}$ wird Eta-mü-nü ausgesprochen.

Übergang zu gekrümmter Raumzeit

Was passiert mit (4), wenn wir gekrümmte Koordinaten oder gekrümmte Raumzeit einführen? Betrachten wir zuerst den einfachsten ungekrümmten Fall. Wenn wir Eta in (7) einsetzen und ausmultiplizieren erhalten wir die Formel (4):

(9) $$\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2$$

In gekrümmten Koordinaten/Raumzeit ist der Metrik-Tensor $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ komplizierter und in der Regel sind die Komponenten keine Konstanten, sondern Funktionen der Raumzeit-Position. Entsprechend komplizierter sieht (7) in so einem Falle ausmultipliziert aus. Das Prinzip bleibt aber das selbe.

Eigenwerte des Metrik-Tensors

Die wesentlichen Eigenschaften des Metrik-Tensors (Symmetrie usw.) gelten auch in der Relativitätstheorie. In 3D-Raum-Systemen hat der Metrik-Tensor jedoch immer 3 positive Eigenwerte, während in der 4D-Raumzeit der Metrik-Tensor immer einen positiven und 3 negative Eigenwerte hat!

Zusammenfassung

Praktisch alles was bisher über Tensoren und deren Transformations-Eigenschaften gesagt wurde, gilt auch für Raumzeit-Tensoren. Die Unterschiede sind die zusätzlichen Zeit-Komponenten und die Verwendung griechischer statt lateinischer Indizes.

So ist die Transformation eines kontravarianten Raumzeit-Vektors z.B. folgendermassen definiert (vergleiche mit Transformation kontravarianter Tensoren):

$$\boxed{V^{\nu}(\mathbf{y}) = \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\, V^{\mu}(\mathbf{x})} \tag{10}$$