Berechnungen zur Ringwelt von Larry Niven

Donnerstag, 4. Oktober 2012 - 19:10 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kurioses

Die Ringwelt ist eine fiktive Welt im Known Space-Universum des Science-Fiction Schriftstellers Larry Niven. Sie hatte ihr Debüt in dem 1970 erschienen Science-Fiction-Roman Ringworld (deutsch: Ringwelt). Das Buch gilt heute als einer der Klassiker der Science-Fiction.[1]

In diesem Beitrag stelle ich ein paar Berechnungen zur Ringwelt an. Die Frage ist, ob eine solche Welt gebaut werden könnte oder ob das physikalisch nicht möglich ist.

Aufbau der Ringwelt

Die Ringwelt ist eine künstliche Welt, die einen Stern ringförmig umgibt. Ihr Radius ist ungefähr gleich dem Abstand der Erde von der Sonne, etwa 150 Millionen km. Ihre Breite beträgt 1.6 Millionen km, etwa dem Durchmesser des Zentralgestirns entsprechend, und an den Rändern befinden sich zwei 1.600 km hohe Aussenwälle, die die Atmosphäre innerhalb des Ringes halten. Ihre Oberfläche beträgt etwa das Dreimillionenfache der Erdoberfläche.[1]

Im Verhältnis zu ihren gigantischen Ausmassen besteht die Ringwelt aus sehr wenig Material. Die Gesamtmasse entspricht etwa 350 Erdmassen (so viel wie die Summe aller Planeten unseres Sonnensystems). Die durchschnittliche Dicke des Ringmaterials beträgt nur etwa 30 m. Auf der Aussenseite des Ringes befindet sich noch eine zusätzliche schaumähnliche Schutzschicht von etwa 300 m Dicke, die Meteoroiden und andere Himmelskörper beim Einschlag abbremsen soll.

Physikalische Bedenken

Im Wikipedia-Artikel zur Ringwelt stehen zum Aufbau folgende Bedenken:

- Einer der Punkte, in denen die Ringwelt-Romane einer wissenschaftlichen Grundlage entbehren, betrifft das Material, *Scrith* genannt, aus dem der Ring gefertigt ist. Das Material müsste unglaublich dicht sein und eine unrealistisch hohe Zugfestigkeit (in der Grössenordnung der starken Kernkraft) besitzen, um die durch die Rotation des Ringes entstehenden inneren Zugkräfte aushalten zu können.

- Um die gigantische Ringwelt in Rotation zu versetzen, musste das riesige Energieäquivalent von etwa 0.2 % der Erdmasse aufgewendet werden.

Ich möchte in diesem Beitrag konkrete Berechnungen dazu vornehmen und diese erklären, damit man nachvollziehen und beurteilen kann, ob diese Bedenken begründet sind.

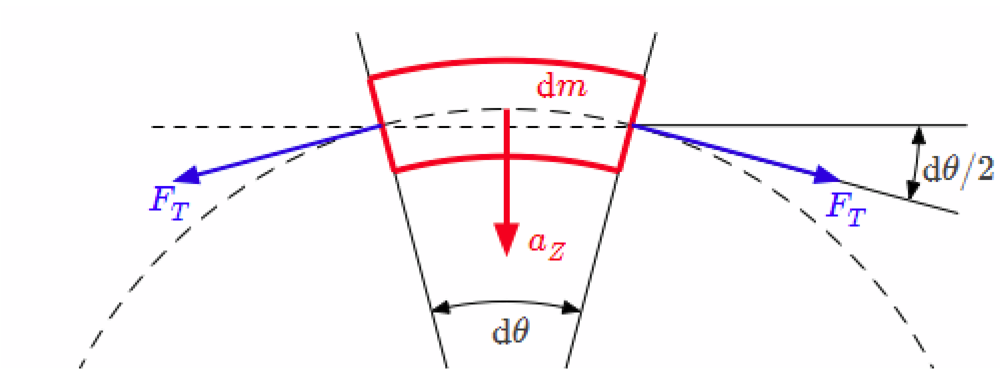
Daten zur Ringwelt

Zunächst liste ich einige Daten zur Ringwelt auf, die ich nachher für meine Berechnungen benötige[2]:

Masse der Sonne	$M_S = 1.93 \cdot 10^{30}$ kg
Radius der Sonne	$R_S = 680 \cdot 10^6$ m
Masse der Ringwelt	$m = 2.1 \cdot 10^{27}$ kg
Radius der Ringwelt	$r = 153 \cdot 10^9$ m
Breite der Ringwelt	$b = 1.6 \cdot 10^9$ m
Dicke der Ringwelt	$d = 30$ m
Querschnittsfläche	$A = b \cdot d = 48 \cdot 10^9$ m^2
Beschleunigung (Gravitation) auf der Ringwelt	$a = 9.73$ m/s^2
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = 7.98 \cdot 10^{-6}$ rad/s
Rotationsperiode	$T = 787 \cdot 10^3$ s (ca. 9.1 Tage)
Tangentialgeschwindigkeit	$v = 1.22 \cdot 10^6$ m/s
Gravitationskonstante	$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg/s^2

Berechnung der Drehgeschwindigkeit

Für die Berechnung der Drehgeschwindigkeit ω und der daraus resultierenden Beschleunigung a_Z und der Zugkräfte F_T die auf einen Querschnitt der Ringwelt wirken, zerlege ich den Ring gedanklich in Segmente, die durch den Winkel $\mathrm{d}\theta$ aufgespannt werden und untersuche die Kräfte die auf dieses Segment wirken:



Lassen wir zunächst mal die Sonne verschwinden. Auf die Bewohner der Ringwelt wirkt dann nur die Zentripetalbeschleunigung a_Z, welche dafür verantwortlich ist, dass das Ringsegment sich auf einer kreisförmigen Bahn um das Zentrum bewegt. Diese Beschleungigung spürt der Bewohner als Gewichtskraft. Die Zentripetalbeschleunigung a_Z ist nur vom Radius r der Ringwelt und der Drehgeschwindigkeit ω abhängig:

(1) $$\boxed{a_Z = r \cdot \omega^2}$$

Der Radius r der Ringwelt ist gegeben. Die Drehgeschwindigkeit wird nun so eingestellt, dass a_Z gerade der gewünschten Erdbeschleunigung von in unserem Fall $a = 9.73\ \mathrm{m/s^2}$ entspricht.

Nun hat aber die Sonne mit ihrer Gravitation auch einen Einfluss auf das System. Sie verringert die gespürte Beschleunigung um einen Betrag a_S aufgrund ihrer Anziehungskraft:

(2) $$\boxed{a_S = \frac{G \cdot M_S}{r^2}}$$

wobei
- a_S = Beschleunigung auf einen Körper durch die Gravitation der Sonne
- G = Gravitationskonstante
- M_S = Masse der Sonne
- r = Entfernung von der Sonne

Damit die Bewohner trotzdem die Beschleunigung von $a = 9.73\ \mathrm{m/s^2}$ zu spüren bekommen, muss die Zentripetalbeschleunigung um a_S vergrössert werden:

(3) $$\boxed{a_Z = a_S + a = r \cdot \omega^2}$$

wobei
- a_Z = Zentripetalbeschleunigung der Ringwelt
- a_S = Beschleunigung durch die Gravitation der Sonne
- a = Beschleunigung, welche die Bewohner spüren sollen

Die notwendige Winkelgeschwindigkeit ω kann nun wiefolgt berechnet werden:

(4) $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{G \cdot M_S + a \cdot r^2}{r^3}}}$$

mit $$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

wobei
- ω = Winkelgeschwindigkeit der Ringwelt
- T = Rotationsperiode
- M_S = Masse der Sonne

a	=	Gewünschte Schwerebeschleunigung der Bewohner
r	=	Radius der Ringwelt
G	=	Gravitationskonstante

Die Tangentialgeschwindigkeit v kann aus ω sehr leicht berechnet werden:

(5) $$\boxed{v = \omega \cdot r}$$

Konkrete Daten für Beschleunigung und Drehung

Beschleunigung durch Sonne (2)	$a_S = 5.5 \cdot 10^{-3}$ m/s^2
Zentripetalbeschleunigung (3)	$a_Z = 9.735$ m/s^2
Winkelgeschwindigkeit (4)	$\omega = 7.98 \cdot 10^{-6}$ rad/s
Rotationsperiode (4)	$T = 787.7 \cdot 10^3$ s

Berechnung der Material-Zugbelastung

Wir kennen nun die Zentripetalbeschleunigung a_Z, welche unser Ringsegment auf der Umlaufbahn um die Sonne hält. Nach Newtons $F = m \cdot a$ kann nun die Zentripetalkraft F_Z berechnet werden, die dazu nötig ist:

(6) $$\boxed{F_Z = \mathrm{d}m \cdot a_Z}$$

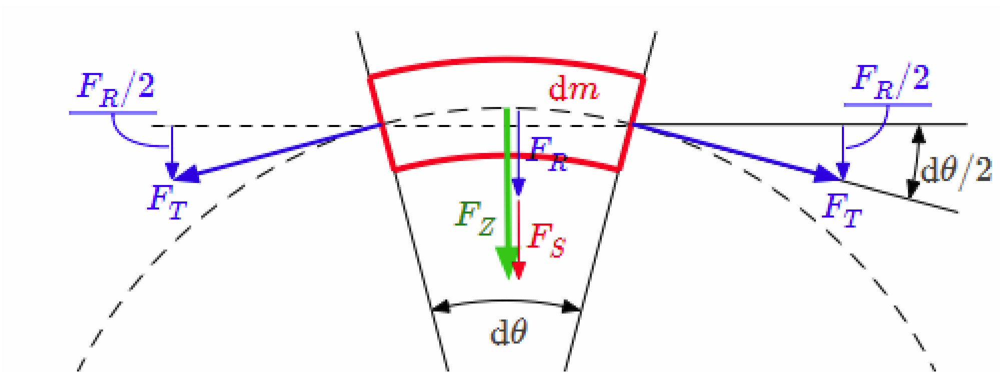
Die Masse $\mathrm{d}m$ des Ringsegmentes kann aus der gesamten Masse m der Ringwelt wiefolgt berechnet werden:

(7) $$\boxed{\mathrm{d}m = \frac{m}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta = \rho \cdot A \cdot r \cdot \mathrm{d}\theta}$$

wobei	$\mathrm{d}m$	=	Masse des Ringsegmentes
	m	=	Gesamtmasse der Ringwelt
	$\mathrm{d}\theta$	=	Winkelausschnitt des Ringsegmentes
	ρ	=	Materialdichte
	A	=	Querschnittsfläche
	r	=	Ringradius

Woher stammt nun die notwendige Zentripetalkraft F_Z, die das Ringsegement auf der Umlaufbahn hält?

Betrachten wir das folgende Bild, in dem alle Kräfte eingezeichnet sind:



Ein Teil der Zentripetalkraft F_Z wird von der Anziehungskraft F_S der Sonne aufgebracht. Der Rest F_R muss von den Tangentialkräften F_T aufgebracht werden, welche im Material wirken.

(8) $$\boxed{F_Z = F_S + F_R \qquad \leftrightarrow \qquad F_R = F_Z - F_S}$$

Die Tangentialkräfte lassen sich in horizontale und vertikale Komponenten zerlegen. Die horizontalen Komponenten sind sich entgegengesetzt und gleich gross, heben sich also auf und haben keinen Einfluss auf die Bewegung. Die vertikalen Komponenten summieren sich zu F_R und können aus F_T wiefolgt geometrisch berechnet werden:

(9) $$F_R/2 = F_T \cdot \sin(\mathrm{d}\theta/2)$$

Für die folgenden Berechnungen nehmen wir an, dass $\mathrm{d}\theta$ beliebig klein gewählt werden kann. Für kleine Winkel $\mathrm{d}\theta$ gilt:

(10) $$sin(\mathrm{d}\theta) \approx \mathrm{d}\theta$$

Dadurch vereinfacht sich (9) zu:

(11) $$F_R/2 = F_T \cdot \mathrm{d}\theta/2 \qquad \Rightarrow \qquad F_R = F_T \cdot \mathrm{d}\theta$$

Damit können wir die Zugkräfte F_T im Material berechnen, wenn wir die Kraft F_R kennen:

(12) $$\boxed{F_T = \frac{F_R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{F_Z - F_S}{\mathrm{d}\theta}}$$

Hier nochmals zusammengestellt, wie die Zentripetalkraft F_Z und die Anziehungskraft der Sonne

F_S auf das Ringsegment berechnet wird:

(13) $$\boxed{F_Z = \mathrm{d}m \cdot r \cdot \omega^2 = \mathrm{d}m \cdot a_Z}$$

(14) $$\boxed{F_S = \mathrm{d}m \cdot \frac{G \cdot M_S}{r^2} = \mathrm{d}m \cdot a_S}$$

In Fomel (12) eingesetzt erhalten wir:

(15) $$F_T = \frac{F_Z - F_S}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}m \cdot a_Z - \mathrm{d}m \cdot a_S}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}m \cdot (a_Z - a_S)}{\mathrm{d}\theta}$$

Aus Formel (3) wissen wir dass $a_Z - a_S = a$ ist, welches die für die Bewohner spürbare Beschleunigung ist. Ausserdem können wir für $\mathrm{d}m$ die Formel (7) verwenden. Dies in (15) eingesetzt ergibt:

(16) $$F_T = \frac{m \cdot \mathrm{d}\theta \cdot a}{2\pi \cdot \mathrm{d}\theta} = \frac{m \cdot a}{2\pi}$$

Die Masse m der Ringwelt können wir noch durch die Dichte ρ mal das Volumen $V = A \cdot 2\pi \cdot r$ ersetzen, womit wir schliesslich die folgende Formel für die Zugkräfte erhalten:

(17) $$\boxed{F_T = \frac{m \cdot a}{2\pi} = \rho \cdot A \cdot r \cdot a}$$

wobei

	F_T	=	Zugkräfte im Ringmaterial verteilt auf den Querschnitt A
	m	=	Masse der Ringwelt
	a	=	Beschleunigung (Gravitation) auf der Ringwelt
	ρ	=	Dichte des Materials *Scrith*
	A	=	Querschnitt der Ringwelt
	r	=	Radius der Ringwelt

Bei Materialien wird die maximale Zugfestigkeit angegeben. Um beurteilen zu können, ob ein Material eine bestimmte Spannung (Kraft pro Fläche) aushält, gebe ich noch die Formel zur Berechnung der Spannung σ an:

(18) $$\boxed{\sigma = \frac{F_T}{A} = \frac{m \cdot a}{2\pi \cdot A} = \rho \cdot r \cdot a}$$

Diskussion

Interessant ist, dass die Zugkräfte F_T nur von der Masse der Ringwelt und der gewünschten Beschleunigung (Gravitation) abhängen. Die Grösse und die Form des Querschnitts haben keinen Einfluss, solange die Masse des Rings die selbe bleibt!

Durch Vergrössern des Querschnitts A könnte man die Belastungsspannung im Material senken. In gleichem Masse nimmt aber dabei das Volumen und damit die Gesamtmasse m des Ringes zu und damit auch die Zugkräfte. Die Belastung lässt sich also nicht durch bauliche Massnahmen ändern!

Die Gravitation der Sonne hat keinen Einfluss auf die Zugkräfte. Lediglich die zu erreichende Gravitationsbeschleunigung a für die Bewohner der Ringwelt geht in die Formeln ein. Je stärker die Sonne sich auswirkt (sie verringert die gewünschte Gravitation a), umso schneller muss der Ring rotieren, um die Sonne zu kompensieren. Dies würde die Zugkräfte zwar erhöhen, aber die Sonne wirkt auch auf die Ringsegmente und reduziert damit die Zugkräfte um genau den Betrag, der durch die schnellere Rotation entsteht!

Die Belastungsspannung des Ringmaterials σ hängt von der Matieraldichte ρ, dem Ringradius r und der Beschleunigung a ab. Wenn die Ringwelt nur gerade so schnell rotiert, dass die resultierende Beschleunigung (Gravitation) der Bewohner a gerade Null wird, so treten keine Zugkräfte im Material auf, weil die Segmente des Ringes gerade so schnell rotieren, wie ein Planet auf dieser Umlaufbahn im freien Fall fliegen würde.

Man sieht auch, dass der Radius der Ringwelt nicht beliebig gross werden kann, da irgendwann die Belastungsgrenze σ_{max} überschritten wird. Je leichter das Material ist (je kleiner die Dichte ρ), umso grösser kann der Radius werden.

Konkrete Werte für die Ringwelt

Tangentiale Zugkräfte in der Ringwelt	$F_T = 3.25 \cdot 10^{27}$ N
Zugspannung im Material	$\sigma = 67.8 \cdot 10^{15}$ N/m^2 = $67.8 \cdot 10^{9}$ N/mm^2
Zugfestigkeit von Stahl	$R_{St} = 510 \cdot 10^{6}$ N/m^2 = 510 N/mm^2
Zugfestigkeit von Kohlenstoffnanoröhrchen	$R_{KNR} = 63 \cdot 10^{9}$ N/m^2 = 63'000 N/mm^2

Wie man sieht überschreitet die Zugspannung σ in der Ringwelt sogar die Zugfestigkeit von Kohlenstoffnanoröhrchen um den Faktor eine Million!

Berechnung des maximal möglichen Radius der Ringwelt

Aus der Formel (18) kann eine Formel zur Berechnung des maximal möglichen Radius einer Ringwelt abgeleitet werden, wenn die Eigenschaften des Ringmaterials wie Dichte ρ und Zugfestigkeit σ bekannt sind:

(19) $$r \leq \frac{\sigma}{\rho \cdot a}$$

Je stärker das Material (grosses σ) und je leichter (kleines ρ), umso grösser kann der Radius der Ringwelt sein. Auch die gewünschte Schwerkraft wirkt sich auf den Radius aus. Für Schwerelosigkeit ($a = 0$) kann der Radius beliebig gross werden.

Maximale Radien für bekannte Materialien

Material	σ	ρ	r_{max}
Stahl	$510 \cdot 10^6$ N/m^2	$7.86 \cdot 10^3$ kg/m^3	$6.67 \cdot 10^3$ m = 6.67 km
Kohlenstoff Nanor.	$63 \cdot 10^9$ N/m^2	$1.35 \cdot 10^3$ kg/m^3	$4.80 \cdot 10^6$ m = 4'800 km

Dies reicht bei Weitem nicht mal aus, die Sonne mit einem Radius von 680'000 km zu umrunden!

Berechnung der Rotationsenergie

Um die Ringwelt in Rotation zu versetzen muss Energie aufgewendet werden, z.B. in Raketentriebwerken. Es spielt keine Rolle, in welcher Zeitdauer die Rotation aufgebaut wird. Man kann über lange Zeit mit wenig Energie oder über kurze Zeit mit viel Energie beschleunigen. Am Ende ist die benötigte Energie die selbe.

Die Rotationsenergie ist eine kinetische Energie (Bewegungsenergie) und kann wiefolgt berechnet werden:

(20) $$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \omega)^2$$

wobei

E_{kin} = Kinetische Energie, die in der Rotation steckt
m = Masse der Ringwelt
v = Tangentialgeschwindigkeit der Ringwelt
r = Radius der Ringwelt
ω = Winkelgeschwindigkeit der Ringwelt

Rotationsenergie der Ringwelt

Rotationsenergie der Ringwelt	$E_{kin} = 1.57 \cdot 10^{39}$ J

Dies ist eine ungeheure Energie! Um zu berechnen, wieviel Masse m_{rot} vollständig in Energie umgewandelt werden müsste um diese kinetische Energie zu erzeugen kann die Formel $E = m \cdot c^2$ verwendet werden:

(21) $$m_{rot} = \frac{E_{kin}}{c^2}$$

Benötigte Masse für E_{kin}	$m_{rot} = 17.6 \cdot 10^{21}$ kg
Masse der Erde	$m_E = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg
Anteil der Erdmasse für E_{kin}	$m_{rot} / m_E = 0.294$ %

Weitere Bemerkungen

Im Wikipedia-Artikel steht der folgende Absatz (4.10.2012):

- Die Ringwelt befindet sich jedoch nicht in einem echten Orbit um die Sonne, ihre Position ist vielmehr in Relation zum Zentralgestirn instabil. Weil die Anziehungskraft der Sonne in der Ringebene in allen Richtungen auf den Ring gleich groß wirkt, fehlt eine stabilisierende Wirkung, die in einem natürlichen Planetenorbit gegeben ist. Wenn der Ring innerhalb der Rotationsebene um einen beliebig geringen Betrag verschoben würde, wirkte auf den sonnennäheren Teil des Ringes eine stärkere Kraft als auf den sonnenferneren Teil. Nach einiger Zeit würde der Ring deshalb unweigerlich mit dem Zentralgestirn kollidieren. Zur Stabilisierung der Ringweltposition sind die Randmauern der Ringwelt deshalb mit Korrekturtriebwerken (englisch attitude jets) ausgerüstet.

Wenn die Ringwelt stabil genug gebaut ist, kann man sich die Masse der Ringwelt als Punkt im Zentrum vorstellen. Wenn dieser Massepunkt nicht exakt im Zentrum der Sonne läge, würde er und damit die ganze Ringwelt einfach um das Sonnenzentrum eiern. Das Ringwelt-Orbit wäre also nicht instabil.

Es gibt aber einige Bedenken, dass die Ringwelt stabil genug gebaut werden könnte. Sie würde wohl eher die Stabilität eines Stoffbandes haben. In diesem Fall würden sich kleinste Störungen katastrophal auswirken.

Die 300 m Schutzschicht gegen Meteoroiden ist ein Witz. Diese könnten mit der selben Wahrscheinlichkeit auch auf der Innenseite der Ringwelt auftreffen, welche keinen Schutz hat. Die Dicke der Schutzschicht spielt auch kaum eine Rolle, denn sie muss die Bewegungsenergie des Meteoroiden auf jeden Fall vollständig aufnehmen. Ob sie das nun über 300 m in einem Schaum macht oder über eine dicke feste Schicht ist egal. Die Aufschlagenergie wird auf jeden Fall an den Ring weiter geleitet und würde sich auch dann katastophal auswirken, wenn es kein Loch im Ring gibt. Die Aufschlagwelle würde sich über den ganzen Ring ausbreiten und ihn destabilisieren.

Quellen

1. Ringwelt; *Wikipedia (de)*
2. *Larry Nivens Ringwelt: Rollenspiel-Abenteuer unter den großen Bogen*; John Hewitt und Sherman Kahn; Chaosium Inc.