Masse und Geschwindigkeit von Neutrinos

Dienstag, 9. April 2013 - 16:03 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, QM

Bis zur Entdeckung der Neutrino-Oszillation wurde angenommen, dass Neutrinos masselos sind. Wenn sich aber etwas mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt, steht die Zeit für das Objekt still. Solche Objekte können sich also nicht verändern. Wenn also ein Neutrino zerfallen kann, bedeutet das, dass die Zeit für das Neutrino nicht stehen bleibt und dass sich das Neutrino langsamer als mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Alles was sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegt hat aber eine Masse.

Die Masse von Elektronen, Quarks und anderer Fermionen kennt man sehr genau. Wieso ist es so schwierig, die Masse von Neutrinos zu messen?

Frage eines Lesers

Opera: Nach der Korrektur wurden offenbar keine Abweichungen von Neutrinogeschwindigkeit und Lichtgeschwindigkeit festgestellt. Auch von Supernova-Ereignissen – die Neutrinos sind ja wirklich sehr lange unterwegs gewesen - seien keine Unterschiede gemessen worden. Heisst das nicht, dass Neutrinos keine Masse haben?

Neutrinos der Supernova 1987A

Die bislang genaueste Übereinstimmung mit der Lichtgeschwindigkeit konnte 1987 durch Beobachtungen von Antineutrinos mit einer Energie von 7.5 bis $35\ \mathrm{MeV}$, die bei der Supernova 1987A in einer Entfernung von etwa $160'000$ Lichtjahren entstanden waren, festgestellt werden. Die wenigen Stunden, um die die Neutrinos vor dem Licht eintrafen, entsprechen einer relativen Abweichung von $|\ c - v\ |\ /\ c = 10^{-9}$. Das heisst, die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit $c = 2.99792458 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$ zeigt sich erst in der 9. Stelle nach dem Dezimalpunkt![1]

Dass die Neutrinos der Supernova einige Stunden vor dem Licht eingetroffen sind wird darauf zurückgeführt, dass die wechselwirkungsarmen Neutrinos den Bereich der Supernova ungehindert durchqueren konnten, während das Licht länger dafür benötigte. Photonen werden von geladenen Teilchen, wie sie in heissen Gasen vorkommen, gestreut und dadurch quasi verlangsamt, während die ungeladenen Neutrinos ungehindert alles durchqueren.

Zusammenhang zwischen Masse, Energie und Geschwindigkeit

Da Neutrinos praktisch nicht mit gewöhnlicher Materie interagieren, sind sie sehr schwer nachzuweisen. Der Nachweis erfolgt indirekt durch Messen der Energien z.B. von Protonen, nachdem diese von einem Neutrino getroffen worden sind. Wenn man die Energie und Geschwindigkeit eines Neutrinos kennt, kann man theoretisch seine Masse berechnen. Das ist aber einfacher gesagt als getan.

Warum tut man sich so schwer, die Neutrino-Masse über seine Geschwindigkeit und Energie zu bestimmen?

Das hat zwei Gründe. Zum einen ist die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit für Neutrinos extrem klein, so klein, dass sie praktisch nicht messbar ist (siehe Tabelle). Zum anderen haben Neutrinos zum Beispiel von Supernovas eine hohe kinetische Energie von mehreren MeV.

Die relativistische Energie (Ruhe-Energie plus kinetische Energie) berechnet man nach der speziellen Relativitätstheorie mit folgender Formel:

$$\boxed{E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{1}$$

wobei
E = relativistische Energie in Elektronenvolt $[\mathrm{eV}]$
m = Teilchenmasse in $[\mathrm{eV/c^2}]$
c = Lichtgeschwindigkeit
v = Teilchengeschwindigkeit

Daraus lässt sich die Masse berechnen, wenn man die Geschwindigkeit v und die Energie E eines Teilchens kennt:

$$m = \frac{E}{c^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2}$$

Beispiel: Ein Elektron hat bei einer Geschwindigkei von 86.6 % der Lichtgeschwindigkeit, also $v = 2.598 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$, eine Gesamtenergie von $1\ \mathrm{MeV}$ (Mega Elektronenvolt). Seine Masse ist:

$$m = \frac{E}{c^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1\ \mathrm{MeV}}{c^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{(2.598 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s})^2}{(3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s})^2}} = 0.5\ \mathrm{MeV/c^2} \tag{3}$$

Bei der gleichen Energie von $1\ \mathrm{MeV}$ hat ein Neutrino eine Geschwindigkeit von $99.999'999'999'998\%$ der Lichtgeschwindigkeit! Da ist mein Taschenrechner mit obiger Formel überfordert! Ganz abgesehen davon, dass diese extrem kleine Abweichung zur Lichtgeschwindigkeit nicht messbar ist.

Berechnung der Geschwindigkeit aus der Energie

Wenn man die Masse kennt, kann man für eine bestimmte Energie ausrechnen, wie schnell das Teilchen sich bewegt. Dazu löst man die Formel (1) nach der Geschwindigkeit v auf. Für kleine Massen und hohe Energien gilt die Näherungsformel.

	exakte Formel	**Näherungsformel**
(4)	$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2}$	$v = c \cdot \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2\right]$

Für sehr kleine Abweichungen von der Lichtgeschwindigkeit ist obige Formel unpraktisch und überfordert einen Taschenrechner bereits. Man berechnet daher die relative Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit nach folgender Formel:

	exakte Formel	**Näherungsformel**
(5)	$\boxed{\frac{c-v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2}}$	$\boxed{\frac{c-v}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2}$

wobei

$c - v$	=	Absolute Abweichung der Geschwindigkeit eines Teilchen von der Lichtgeschwindigkeit
$(c - v)/c$	=	Relative Abweichung der Geschwindigkeit

Die Näherungsformel wird verwendet, wenn der Quotient $m \cdot c^2/E$ viel kleiner als 1 ist, was insbesondere bei Neutrinos mit ihrer kleinen Masse und hohen Energie der Fall ist. In diesem Fall liefert nämlich die exakte Formel bei begrenzter Rechengenauigkeit kein sinnvolles Resultat mehr, da 1 minus eine sehr kleine Zahl dann 1 ergibt. Die Näherungsformel ergibt jedoch in diesem Fall das exakte Resultat in voller Genauigkeit des Rechners.

> **Berechnung der Näherungsformel**
>
> Der Wurzelausdruck kann durch folgende Taylorentwicklung angenähert werden. In der Analysis verwendet man Taylorreihen, um Funktionen in der Umgebung bestimmter Punkte durch Potenzreihen darzustellen. So kann ein komplizierter analytischer Ausdruck durch eine nach wenigen Gliedern abgebrochene Taylorreihe oftmals gut angenähert werden:[2]
>
> (6) $$\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \Big|\ \text{für } x \ll 1$$
>
> In unserem Fall ist $x = m \cdot c^2/E$, womit sich die Näherungsformel ergibt:

(7) $$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2} \approx c \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2\right] \qquad \Big| \text{ für } \frac{m \cdot c^2}{E} \ll 1$$

Entsprechend kann auch für $(c - v)/c$ eine Näherungsformel berechnet werden:

(8) $$\frac{c - v}{c} = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2} \approx 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2$$

Zusammengefasst:

(9) $$\frac{c - v}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2 \qquad \Big| \text{ für } \frac{m \cdot c^2}{E} \ll 1$$

Die folgende Tabelle zeigt ein paar berechnete Geschwindigkeiten für Neutrinos mit einer angenommenen Masse von $0.2\ \mathrm{eV/c^2}$ und Elektronen mit einer Masse von $0.5\ \mathrm{MeV/c^2}$:

Energie	Geschwindigkeit	Neutrino	Elektron
1 eV	$(c - v) / c$	0.01	***
	% Lichtgeschw.	98 %	***
1 keV	$(c - v) / c$	$2 \cdot 10^{-8}$	***
	% Lichtgeschw.	99.999'998 %	***
1 MeV	$(c - v) / c$	$2 \cdot 10^{-14}$	0.13
	% Lichtgeschw.	99.999'999'999'998 %	86.6 %
1 GeV	$(c - v) / c$	$2 \cdot 10^{-20}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$
	% Lichtgeschw.	99.999'999'999'999'999'998 %	99.999'9875 %

*** Da ein Elektron eine Ruhemasse von $0.5\ \mathrm{MeV/c^2}$ hat, kann seine Energie E nicht kleiner als $0.5\ \mathrm{MeV}$ sein. Daher gibt es an dieser Stelle keine Geschwindigkeitswerte.

Neutrinos mit kleinen Energien, wenn sie denn vorkommen, haben keine messbaren Auswirkungen bei Kollisionen. Haben Neutrinos jedoch genügend hohe Energien, bewegen sie sich so nahe der Lichtgeschwindigkeit, dass die Abweichung dazu nicht genau genug gemessen werden kann. Daher kann mit der hier gezeigten Methode die Masse von Neutrinos nicht genau genug ermittelt werden. Es kann nur eine obere Grenze für die Masse angegeben werden.

Grobe Schätzung der Neutrinomasse aufgrund der Supernova 1987A

Wenn wir die Daten aus der Supernova Beobachtung heranziehen, können wir folgende Abschätzung für die Neutrinomasse machen: Wir kennen die relative Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit $|c - v| / c = 10^{-9}$ und die Energien von 7.5 bis $35\ \mathrm{MeV}$. Für die Berechnung der Masse aus diesen Werten löse ich die Näherungsformel (5) nach der Masse m auf:

(10) $$m = \frac{E}{c^2}\sqrt{2 \cdot \left(\frac{c - v}{c}\right)} = 7.5 \cdot 10^6\ \mathrm{eV/c^2}\sqrt{2 \cdot 10^{-9}} = 335\ \mathrm{eV/c^2}$$

Diese Abschätzung ergibt eine Neutrinomasse, die etwa einem tausendstel der Elektonenmasse von $0.5\ \mathrm{MeV/c^2}$ entspricht.

Quellen

1. Messungen der Neutrinogeschwindigkeit; Wikipedia
2. Taylorreihe; Wikipedia