Raketenflug Einstein gegen Newton

Mittwoch, 27. Juni 2012 - 03:02 | Autor: wabis | Themen: Wissen, Physik, Kosmologie

Bevor Albert Einstein seine Relativitätstheorie aufgestellt hat, wurden alle Berechnungen von Flugbahnen nach Newtons Theorie ausgeführt. Solange die Geschwindigkeiten der Objekte nicht in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit reichen, stimmen beide Theorien gleichermassen gut. Bei sehr hohen Geschwindigkeiten gibt es jedoch grosse Abweichungen zwischen den beiden Theorien.

Am Beispiel eines speziellen Raketenfluges lassen sich im Rechenformular auf dieser Seite die Vorhersagen beider Theorien miteinander vergleichen. Beide Theorien sagen für die selben Flugbedingungen sehr unterschiedliche Reisezeiten und Geschwindigkeiten voraus.

Wer das Rennen gewinnt? Das hängt vom Beobachter ab!

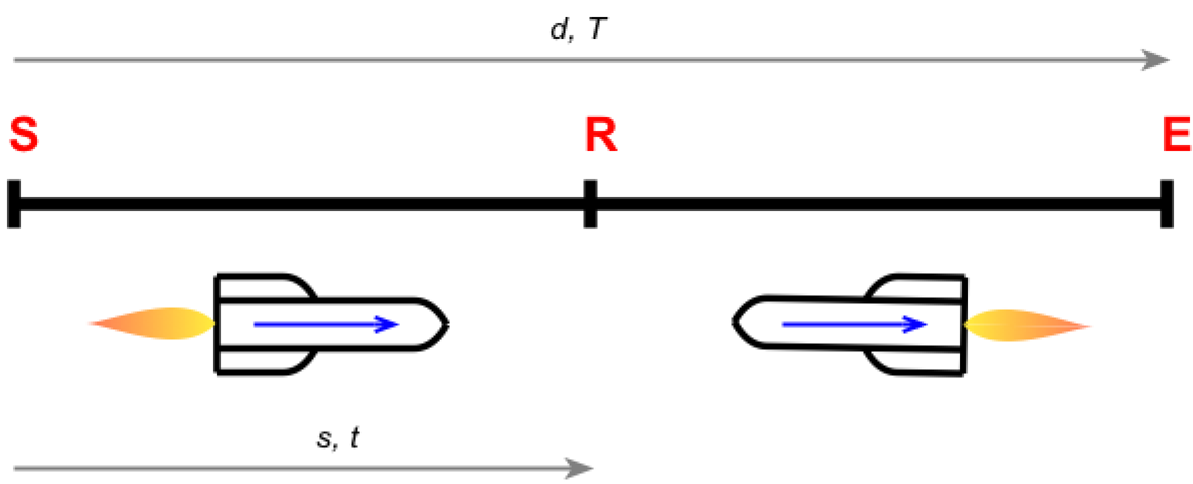
Raketenflug zu einem fernen Ort

Ich berechne einen Flug mit einer Rakete zu einem fernen Stern und zwar sowohl nach der Theorie der klassischen Mechanik[1] von Newton[2], als auch nach der speziellen Relativitätstheorie[3] von Einstein[4]. Beide Flüge finden unter den selben Bedingungen statt.

Der Flug hat zwei Phasen:

1. **Beschleunigungsphase**: Die Rakete Startet beim Punkt **S** und beschleunigt konstant mit der Beschleunigung a bis sie die Hälfte der Strecke d beim Punkt **R** erreicht hat.

2. **Bremsphase**: Beim Punkt **R** wendet die Rakete um 180 Grad und bremst mit der selben Beschleunigung ab, bis sie den Punkt **E** erreicht hat. An diesem Punkt hat sie gerade auf Stillstand abgebremst.



Aufgabe

Gegeben ist die zu fliegende Distanz d und die Beschleunigung a, welche für die ganze Flugdauer für die Astronauten konstant ist, abgesehen von der Richtungsänderung beim Punkt **R**.

Ich möchte unter anderem folgendes berechnen:

- Flugdauer T nach Newton
- Flugdauer T nach Einstein für die Erdbewohner
- Flugdauer τ nach Einstein für die Astronauten
- Flugstrecke S nach Einstein aus Sicht der Astronauten
- Höchstgeschwindigkeit V nach Newton
- Höchstgeschwindigkeit V nach Einstein
- Beschleunigung A nach Einstein bei **R** von der Erde aus gesehen
- Zeitdehnung $\Delta\tau$ und Längenkontraktion ΔS nach Einstein bei **R**

Flugberechnungen

Zu Beginn wird eine Reise ins Zentrum der Milchstrasse berechnet, welches ca. 26'000 Lj (Lichtjahre) von der Erde entfernt ist. Du kannst aber jederzeit andere Distanzen eingeben. Mit den Radiobuttons *Längen* und *Zeiten* kannst du verschiedene Masseinheiten einstellen. Wenn Du z.B. eine Reise zum Mond berechnen willst, wählst du bei *Längen* am Besten *km* und gibst bei *d* 380'000 ein. Da eine solche Reise nur Stunden dauert, wählst du als *Zeit* Einheiten *h* (Stunden).

AE = Astronimische Einheit: Die AE hat eine Länge von 149'597'870'700 Metern und entspricht etwa dem mittleren Abstand zwischen Erde und Sonne.[5]

pc = Parsec: Ein Parsec ist die Entfernung, aus der der mittlere Abstand der Erde zur Sonne (= 1 AE) unter einem Winkel von einer Bogensekunde (1" = 1°/3600) erscheint. Ein Parsec ist ca. $3.26\ \text{Lj} = 3.0856776 \cdot 10^{16}\ \text{m}$.[6]

Einheiten und Konstanten

Reisedaten Reset

d	26'000	Lj	*a*	9.81	m/s^2

Einheiten und Konstanten

Längen	◉ Lj	○ Lmon	○ Ltg	*Zeiten*	◉ Jahre	○ Monate	○ Tage
	○ Lh	○ Lmin	○ Ls		○ h	○ min	○ s
	○ AE	○ pc	○ km				
	9.46073047258 E+15	m/Lj			31'556'925.261	s/Jahr	
1 Lj =	9'460'730'472'580	km		*1 Jahr =*	31'556'925.261	s	
c =	299'792'458	m/s					

	Newton			Einstein	
T	317.358269772	Jahre	T	26'002.4926606	Jahre
τ	317.358269772	Jahre	τ	19.751689849	Jahre
d	26'000	Lj	d	26'000	Lj
S	26'000	Lj	S	18.4088018776	Lj
V	163.856173916	c	V	0.9999999972260	c
A	9.81	m/s^2	A	4.0540125261 E-12	m/s^2
$\Delta\tau$	1		$\Delta\tau$	13'425.4228652	
ΔS	1		ΔS	13'425.4228652	

- T = Flugzeit aus Sicht Erde
- τ = Flugzeit aus Sicht Rakete
- d = Flugstrecke aus Sicht Erde
- S = Flugstrecke aus Sicht Rakete
- V = Geschwindigkeit bei **R** aus Sicht Erde
- A = Beschleunigung bei **R** aus Sicht Erde
- $\Delta\tau$ = Zeitverlangsamung bei **R**
- ΔS = Längenkontraktion bei **R**

Die verwendeten Formeln findest du weiter unten auf dieser Seite. Wenn dich die Herleitung der Formeln interessiert, so lies meinen Blog-Beitrag:

- **Relativistische Bewegungsgleichungen erklärt**

Das JavaScript für die Berechnungen im obigen Formular kannst du einsehen unter:

- **NewtonEinstein.js**

Reisestrecke d

Eine Reise bis ins Zentrum der Milchstrasse entspricht einer Distanz von ca. $26'000\ \mathrm{Lj}$[7]. Diese Distanz nehme ich für mein Berechnungsbeispiel. Du kannst aber auch andere Werte im Formular oben eingeben.

Wenn du kürzere Distanzen berechnen willst, z.B. ca. 8 Lichtminuten (Lmin) für die Distanz Erde-Sonne (= 1 AE), so kannst du bei *Einheiten und Konstanten* unter *Zeiten* eine andere Massseinheit wählen, z.B. Lichtminuten (Lmin), Lichtsekunden (Ls), Astronomische Einheit (AE), km usw.

Interessante Reisestrecken

Reise zum Mond: Der Mond ist ca. 380'000 km von der Erde entfernt. Wähle als Längeneinheit *km* und als Zeiteinheit *h* (Stunden) und gibt die Entfernung bei d ein. Beachte, wie sehr sich für solche kurzen Distanzen die Newton- und Einstein-Werte annähern. Der Unterschied ist praktisch vernachlässigbar.

Reise zum Mars: Ein Funksignal zum Mars benötige etwa 20 Minuten (abhängig von der Stellung zur Erde). Um die Reise zum Mars zu berechnen, wähle bei *Längen* Lichtminuten (Lmin) und bei *Zeiten* Tage. Gib im Feld d 20 (also 20 Lmin) ein.

Reise zur Sonne: Die Sonne ist ca. 8 Lichtminuten von der Erde entfernt. Du kannst diese Aufgabe gleich lösen wie bei der Reise zum Mars. Die Entfernung Erde-Sonne ist aber genau 1 Astronimische Einheit AE. Daher bietet es sich an, bei *Längen* die Einheit AE zu wählen und bei d den Wert 1 einzugeben. Wenn du wissen willst, wie viele Kilometer das sind, wähle nach der Eingabe einfach bei *Längen* die Einheit km. Der Wert bei d wird sogleich in km angezeigt.

Durchqueren der Milchstrasse: Die Milchstrasse hat einen Durchmessen von ca. 100'000 Lichtjahren. Wähle bei *Längen* die Einheit *Lj* und bei *Zeiten Jahre*. Gib im Feld d 100'000 oder 1E5 ein.

Reise ans Ende des Universums: Das sichtbare Universum hat einen Radius von mehr als 45 Milliarden Lichtjahren. Wähle bei *Längen* als Einheit Lichjahre *Lj* und bei *Zeiten Jahre*. Gib in das Feld d 45E9 oder 45'000'000'000 ein. Beachte, dass bei dieser Strecke die Rechengenauigkeit z.T. nicht mehr ausreicht. So wird bei Einstein als Maximalgeschwindigkeit 1 c, also Lichtgeschwindigkeit angezeigt, obwohl diese nie ganz erreicht werden kann. Interessant ist jedoch, dass diese Strecke innerhalb eines Menschenlebens aus Sicht der Astronauten zurückgelegt werden kann! Auf der Erde vergehen dagegen mehr als 45 Milliarden Jahre!

Beschleunigung a

Eine nicht beschleunigte Rakete behält ihre Geschwindigkeit für immer bei. Die Astronauten darin sind schwerelos. Wird eine Rakete gleichmässig beschleunigt, so ändert sich ihre Geschwindigkeit stetig (Zu- oder Abnahme) und die Astronauten spüren eine künstliche Schwerkraft.

Wenn die Beschleunigung $a = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ beträgt, spüren die Astronauten die selbe Schwerkraft wie auf der Erde[8]. Daher nehme ich diese Beschleunigung für mein Beispiel.

Reisezeiten

Die Reisezeiten werden standardmässig in Jahren angegeben. Intern wird immer mit Sekunden gerechnet. Ein tropischen Jahr[9] dauert:

$$1\ \text{Jahr} = 31'556'925.261\ \mathrm{s}$$

Bei der Theorie von Einstein gibt es zwei Reisezeiten zu beachten. Die Zeit vergeht nämlich für die Astronauten langsamer als für die Erdbewohner!

Wenn kürzere Strecken bei *d* eingegeben werden, sodass die Reisezeit weniger als 1 Jahr dauert, kann man bei *Einheiten und Konstanten* unter *Zeiten* einen anderen Massstab wählen, z.B. Tage, Minuten usw.

Maximale Geschwindigkeit V

Die maximalen Geschwindigkeiten werden in der Hälfte der Strecke d erreicht. Ich gebe die Geschwindigkeit als Mehrfaches der Lichtgeschwindigkeit c an. Ein Wert von $1\ \mathrm{c}$ entspricht der Lichtgeschwindigkeit von[10]:

$$1\ \mathrm{c} = 299'792'458\ \mathrm{m/s} = 299'792.458\ \mathrm{km/s}$$

Einheiten und Konstanten

Das Rechenformular rechnet mit SI-Einheiten, also Metern und Sekunden. Alle anderen Einheiten werden nach der Eingabe oder vor dem Anzeigen mit entsprechenden Konstanten umgerechnet. In den Zahlenfeldern unter den Radiobuttons für *Längen* und *Zeiten* werden die verwendeten Umrechnungkonstanten angezeigt.

Zeiten

Die Umrechnungswert von Tagen, Stunden und Minuten zu Sekunden sind trivial: 1 Minute hat 60 Sekunden, ein Tag hat 24 × 60 × 60 Sekunden usw.

Wieviele Sekunden ein Jahr hat, ist nicht mehr trivial und es gibt mehrere verschiedene Definitionen. Wenn wir allgemein von einem Jahr sprechen, meinen wir ein Tropisches- bzw. Kalenderjahr. Ein tropisches Jahr (von altgriechisch (tropos) = Drehung, Wendung) ist die Zeit zwischen zwei gleichen Zeitpunkten im Ablauf der Jahreszeiten, zum Beispiel von einer Frühlings-Tagundnachtgleiche (Frühlingsanfang) zur nächsten.[9].

Ein tropisches Jahr hat 31'556'925.261 s, das sind 365.24219052 Tage = 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 45.261 Sekunden.

Für die Masseinheit *Monat* vewende ich einfach 1/12 des tropischen Jahres.

Längen

Die meisten Längen beziehen sich auf Stecken, die das Licht in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Die Lichtgeschwindigkeit ist 299'792'458 m/s. Die Strecke, die das Licht in einer Sekunde zurücklegt, ist somit 299'792'458 m und wird als 1 *Ls* (Lichtsekunde) bezeichnet.

Die Strecken für Lichtminute (Lmin), Lichtstunde (Lh) und Lichttag (Ltg) werden einfach durch Multiplikation mit 60, 60×60 und 60×60×24 berechnet.

Für die Berechnung der Strecke 1 *Lj* (Lichtjahr) muss die Dauer eines Jahres genau festgelegt werden. Wie bei Zeiten beschrieben, gibt es verschiedene Definitionen für ein Jahr. Das Lichtjahr ist definiert als die Strecke, die das Licht in einem Jahr nach dem julianischen Kalender zurücklegt. Dieses Jahr hat genau 365.25 Tage.[11]

Ein Lichtmonat *Lmon* wird berechnet, indem das Lichtjahr einfach durch 12 dividiert wird.

Die Astronimische Einheit *AE* hat eine Länge von 149'597'870'700 Metern und entspricht etwa dem mittleren Abstand zwischen Erde und Sonne.[5]

Ein Parsec *pc* ist die Entfernung, aus der der mittlere Abstand der Erde zur Sonne (1 AE) unter einem Winkel von einer Bogensekunde (1" = 1°/3600) erscheint. Ein Parsec ist ca. $3.26 \text{ Lj} = 3.0856776 \cdot 10^{16} \text{ m}$.[6]

Diskussion

Wenn wir die Resultate zwischen Newton und Einstein vergleichen fällt auf, dass die Werte extrem unterschiedlich sind:

Reisedauer

Zunächst fällt auf, dass die Reisedauer T nach Einstein von der Erde aus betrachtet extrem viel länger ist, als die Reisedauer nach Newton. Dies kommt daher, dass nach Newton die Rakete Überlichtgeschwindigkeit fliegen kann, nach Einstein jedoch kann die Lichtgeschwindigkeit nicht überschritten werden.

Andererseits ist die Reisedauer für die Astronauten bei der Reise ins Zentrum der Milchstrasse (26'000 Lj) nach Einstein mit $\tau = 19.75 \text{ Jahre}$ wesentlich kürzer als die $\tau = 317.36 \text{ Jahre}$ nach Newton! Dies kommt daher, dass nach Einstein die Zeit für Reisende umso langsamer vergeht, je näher die Geschwindigkeit an Lichtgeschwindigkeit heranreicht.

Nach Newton vergeht die Zeit für die Astronauten gleich schnell wie die Zeit auf der Erde, egal mit welcher Geschwindigkeit die Rakete fliegt.

Strecke aus Sicht der Astronauten

Nach Newton ergibt sich für die Astronauten keine andere Strecke als für einen Erdbeobachter: $S = d$.

Nach der Relativitätstheorie verlangsamt sich für die Astronauten nicht nur die Zeit, sondern auch die Flugstrecke schrumpf (siehe Längenkontraktion)! So muss die Rakete für die Strecke von $26'000 \text{ Lj}$ nach Einstein von den Astronauten aus gesehen nur $S = 18.409 \text{ Lj}$ zurücklegen! Diese Strecke schafft die Rakete in $\tau = 19.75 \text{ Jahren}$. Diese Strecke schafft die Rakete also von den Astronauten aus gesehen ohne die Lichtgeschwindigkeit je überschreiten zu müssen!

Maximale Geschwindigkeit

Nach Newton erreicht die Rakete am Punkt **R** eine Geschwindigkeit von $V = 163.856 \text{ c}$, also fast 164-fache Lichtgeschwindigkeit. Seit Einstein wissen wir, dass die Lichtgeschwindigkeit nie überschritten werden kann. Daher erstaunt es auch nicht, dass die maximale Geschwindigkeit nach Einstein $V = 0.99999...$ c ist.

Übrigens gilt die jeweilige Geschwindigkeit an jedem Punkte der Reise sowohl aus Sicht der Erde, als auch aus Sicht der Astronauten. Aus Sicht der Erde muss einfach ein kleiner Streckenabschnitt an diesem Punkt geteilt durch die Zeit für diese Strecke im Erde-System berechnet werden, während die Astronauten die um die Längenkontraktion gestauchte Strecke durch die Eigenzeit τ teilen müssen. Die Längenkontraktion und die Zeitdilation heben sich gerade auf. Auf diese Weise ergibt sich auch in beiden Systemen die selbe Lichtgeschwindigkeit.

Beschleunigung am Punkt R

Nach Newton ist die Beschleunigung immer $A = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, egal ob von der Erde aus gemessen oder von den Astronauten.

Nach Einstein kann dies jedoch nicht sein. Denn wenn die Rakete Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten kann, muss die Beschleunigung von der Erde aus gesehen irgendwann gegen Null gehen. Die Astronauten hingegen spüren auf der ganzen Reise eine konstante Beschleunigung von $9.81\ \mathrm{m/s^2}$!

Zeitverlangsamung und Längenkontraktion

Nach Newton verläuft die Zeit auf der Erde immer gleich schnell wie die Zeit in der Rakete. Daher ist die Zeitverlangsamung immer $\Delta\tau = 1$. Ebenso ist die Reisedistanz nach Newton für die Astronauten gleich lang wie für die Erdbewohner. Zeit und Raum sind für alle Beobachter identisch und starr.

Nach Einstein verläuft die Zeit für die Astronauten von der Erde aus gesehen umso langsamer, je schneller sie relativ zu ihr fliegen. Am Punkt **R** der Reise, wo die Rakete ihre höchste Geschwindigkeit erreicht, vergeht die Zeit für die Astronauten von der Erde aus gesehen 13'425 mal langsamer! Dies ist der Grund, weshalb die Astronauten in ihrer Zeit nur 19.75 Jahre für den Flug brauchen, während auf der Erde 26'002.49 Jahre vergangen sind!

Gleichzeitig schrumpft die Reisestrecke um den selben Faktor wie die Zeit, sodass aus Sicht der Astronauten die Reisestrecke nur 18.409 Lj beträgt. Diese Strecke kann in den 19.75 Jahren zurückgelegt werden, ohne dass die Lichtgeschwindigkeit überschritten werden muss!

Wer gewinnt also das Rennen?

Das hängt vom Betrachter ab:

Von der Erde aus gesehen gewinnt die Newton-Rakete das Rennen, denn sie braucht nur 317.36 Jahre im Gegensatz zu 26'002.49 Jahre nach Einstein. Allerdings würden in beiden Fällen sowohl die Erdenbewohner als auch die Astronauten das Ende des Rennens nicht erleben.

Ganz anders sieht es für die Astronauten nach Einstein aus. Diese erreichen nach ihrer Zeitrechnung das Ziel bereits nach nur 19.75 Jahren! Tatsächlich können sie mit ihrer Rakete jedes Ziel im sichtbaren Universum zu Lebzeiten erreichen! Allerdings altert das Universum in dieser Zeit etwas mehr, als das Licht für die entsprechende Entfernung braucht. In unserem Beispiel altert das Universum um $26'000 + 2.49$ Jahre! Die Astronauten würden also bei ihrem Rückflug schon lange vergessen sein, wenn es dann überhaupt noch eine Menschheit gäbe!

Aber bemerkenswert ist doch die Tatsache, dass Einsteins Theorie das gesamte Universum erreichbar macht. Es ist jedoch meist eine Einbahnstrasse ohne Zurück!

Formeln nach Newton

Die folgenden Formeln gelten bei konstanter Beschleunigung a. Die Zeit verstreicht in der Rakete gleich schnell wie auf der Erde. Die Formeln gelten nur für Geschwindigkeiten weit unter Lichtgeschwindigkeit.

(1) $$\boxed{v(t) = a \cdot t}$$

(2) $$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

(3) $$\boxed{t(s) = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}}$$

(4) $$\boxed{v(s) = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}}$$

(5) $$\boxed{s(v) = \frac{v^2}{2 \cdot a}}$$

(6) $$\boxed{t(v) = \frac{v}{a}}$$

wobei a = Beschleunigung
v = Geschwindigkeit
s = zurückgelegter Weg
t = Reisedauer

Formeln nach Einstein

Für sehr hohe Geschwindigkeiten müssen relativistische Effekte berücksichtigt werden und die folgenden Formeln anstelle der Newton-Formeln verwendet werden.

Die Rakete fliegt mit konstanter lokaler Beschleunigung a. Das heisst, die Raumfahrer spüren während ihrem Flug eine konstante künstliche Schwerkraft. Von der Erde aus gesehen nimmt die Beschleunigung immer mehr ab, je näher sich die Geschwindigkeit der Rakete der

Lichtgeschwindigkeit nähert. In der Rakete vergeht die Zeit τ langsamer als die Zeit t auf der Erde.

Geschwindigkeit der Rakete nach Erdzeit

(7)
$$\boxed{v(t) = \frac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}}$$

wobei	$v(t)$	=	Geschwindigkeit nach der Erdzeit t
	a	=	konstante Beschleunigung für die Astronauten
	t	=	bisherige Reisedauer in Erdzeit
	c	=	Lichtgeschwindigkeit

Beachte: Die selbe Geschwindigkeit v zum Zeitpunkt t wird sowohl von der Erde aus, als auch von den Astronauten in ihrem jeweiligen System gemessen. Die Astronauten messen jedoch mit anderen Werten für Länge und Eigenzeit (wegen Längenkontraktion und Zeitdilation).

Flugstrecke nach Erdzeit

(8)
$$\boxed{s(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]}$$

wobei	$s(t)$	=	Zurückgelegter Weg nach der Zeit t
	t	=	bisherige Reisedauer in Erdzeit
	a	=	konstante Beschleunigung für die Astronauten
	c	=	Lichtgeschwindigkeit

Flugstrecke nach Raketezeit

(9)
$$\boxed{s_R(\tau) = \frac{c^2}{a}\left[\ln\left(\frac{e^{2 \cdot a \cdot \tau / c} + 1}{2}\right) - \frac{a \cdot \tau}{c}\right]}$$

wobei	$s_R(\tau)$	=	bisher zurückgelegte Strecke aus Sicht der Astronauten zur Raketenzeit τ
	τ	=	bisherige Reisedauer für die Astronauten
	a	=	konstante Beschleunigung für die Astronauten
	c	=	Lichtgeschwindigkeit

Achtung: Wegen der Längenkontraktion ist die effektive Reisedistanz für die Astronauten kürzer als die von der Erde aus gemessene Reisedistanz!

Beschleunigung der Rakete auf der Erde gemesen

(10)
$$a_E(t) = \frac{a}{\left[\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1\right]^{3/2}}$$

wobei $a_E(t)$ = Beschleunigung der Rakete im Erdsystem nach der Zeit t

t = bisherige Reisedauer in Erdzeit

a = konstante Beschleunigung für die Astronauten

c = Lichtgeschwindigkeit

Erdzeit für bestimmte Strecke

(11)
$$t(s) = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1}$$

wobei $t(s)$ = bisherige Reisedauer für die Strecke s in Erdzeit

s = bisher zurückgelegter Weg der Rakete bezgl. der Erde

a = konstante Beschleunigung für die Astronauten

c = Lichtgeschwindigkeit

Raketenzeit für bestimmte Strecke

(12)
$$\tau(s) = \frac{c}{a} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1\right)^2 - 1}\right)$$

wobei $\tau(s)$ = Flugzeit für die Strecke s für die Astronauten

s = bisher Zurückgelegter Weg der Rakete bezgl. der Erde

a = konstante Beschleunigung für die Astronauten

c = Lichtgeschwindigkeit

Zeitverlangsamung in der Rakete

(13) $$\boxed{\Delta\tau(t) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = \sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}$$

wobei

$\Delta\tau(t)$	=	Verlangsamungfaktor der Raketenzeit zur Erdzeit t
a	=	konstante Beschleunigung für die Astronauten
c	=	Lichtgeschwindigkeit
t	=	bisher vergangene Zeit auf der Erde

Erdzeit in Raketenzeit umrechnen

(14) $$\boxed{\tau(t) = \frac{c}{a} \cdot \ln\left(\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} + \left(\frac{a \cdot t}{c}\right)\right) = \frac{c}{a} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)}$$

Achtung: Dies ist keine allgemein gültige Umrechnungsformel für die Zeiten. Sie gilt nur für das Beispiel der konstant beschleunigten Rakete!

Raketenzeit in Erdzeit umrechnen

(15) $$\boxed{t(\tau) = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{e^{a \cdot \tau / c} - e^{-a \cdot \tau / c}}{2}\right) = \frac{c}{a} \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \tau}{c}\right)}$$

Achtung: Dies ist keine allgemein gültige Umrechnungsformel für die Zeiten. Sie gilt nur für das Beispiel der konstant beschleunigten Rakete!

Gegenüberstellung Newton / Einstein

Newton	Einstein
$v(t) = a \cdot t$	$v(t) = \dfrac{a \cdot t}{\sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1}}$
$s(t) = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$s(t) = \dfrac{c^2}{a}\left[\sqrt{\left(\dfrac{a \cdot t}{c}\right)^2 + 1} - 1\right]$

$s_R(\tau) = s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$s_R(\tau) = \frac{c^2}{a} \left[\ln\left(\frac{e^{2 \cdot a \cdot \tau / c} + 1}{2} \right) - \frac{a \cdot \tau}{c} \right]$
$t(s) = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$	$t(s) = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1 \right)^2 - 1}$
$\tau(s) = t(s) = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$	$\tau(s) = \frac{c}{a} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\left(\frac{a \cdot s}{c^2} + 1 \right)^2 - 1} \right)$
$a_E = a$	$a_E(t) = \frac{a}{\left[\left(\frac{a \cdot t}{c} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}}$
$\tau = t$	$\tau(t) = \frac{c}{a} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{a \cdot t}{c} \right)$
$t = \tau$	$t(\tau) = \frac{c}{a} \cdot \sinh\left(\frac{a \cdot \tau}{c} \right)$
$\Delta\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1$	$\Delta\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = \sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c} \right)^2 + 1}$
$\Delta s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_R} = 1$	$\Delta s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_R} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = \sqrt{\left(\frac{a \cdot t}{c} \right)^2 + 1}$

- **Relativistische Bewegungsgleichungen erklärt**
- **Bewegungsgleichung einer gleichförmig beschleunigten Rakete (1)**

Bemerkungen

Die obigen relativistischen Gleichungen gelten nur im Rahmen der speziellen Relativität, also innerhalb von Millionen Lichtjahren in einem nicht gekrümmten leeren Raum.

Genaugenommen müssten wir Gravitationsfelder berücksichtigen (die Rakete muss das Feld der Erde, der Sonne, der Galaxie verlassen) und die Änderung der Raumgeometrie (und dadurch eine Veränderung der Längen und der Uhren) durch Massen berücksichtigen. Diese Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie sind jedoch im Vergleich mit den Effekten der hier gezeigten Berechnungen vernachlässigbar.

Die Zeitverlangsamung der allgemeinen Relativitätstheorie infolge der Beschleunigung der Rakete ist in unserem Fall ebenfalls vernachlässigbar.

Für grössere Distanzen (Milliarden Lichtjahre) spielt die Expansion des Universums eine Rolle.

Weitere Informationen

1. Klassische Mechanik; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Klassische_Mechanik
2. Isaac Newton; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
3. Spezielle Relativitätstheorie; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Spezielle_Relativit%C3%A4tstheorie
4. Albert Einstein; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein
5. Astronomische Einheit; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Astronomische_Einheit
6. Parsec; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Parsec
7. Lage der Sonne im Milchstrassensystem; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Milchstrasse#Lage_der_Sonne_im_Milchstra.C3.9Fensystem
8. Erdbeschleunigung; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Erdbeschleunigung
9. Tropisches Jahr; *Wikipedia*
   de.wikipedia.org/wiki/Tropisches_Jahr
10. Lichtgeschwindigkeit; *Wikipedia*
    de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit
11. Lichtjahr; *Wikipedia*
    de.wikipedia.org/wiki/Lichtjahr